連分数展開とユークリッドの互除法【関連問題】

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $<x>$ で表す。

実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を次のように順次定める。

(i) $a_1 = <a>$

(ii) $\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = <\dfrac{1}{a_n}> \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1) $a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a を求めよ。

(3) a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a=\dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n=0$ であることを示せ。

＜ ’11 東京大 ＞