実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $<x>$ で表す。

実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n ($n=1,2,3,\cdots$)を次のように順次定める。

(i) $a_1 = <a>$

(ii) $\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = <\dfrac{1}{a_n}> \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1) $a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a を求めよ。

(3) a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a=\dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n=0$ であることを示せ。

＜ '11 東京大 ＞

【戦略】

(1) **この得体のしれない漸化式の要領をつかむための実験的設問です。**

一般に (小数部分)=(全体)−(整数部分) **です。**

$a_1 = \langle\sqrt{2}\rangle = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2}-1$

$a_2 = \langle\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\rangle = \langle\sqrt{2}+1\rangle = (\sqrt{2}+1)-2 = \sqrt{2}-1$

と，a_1 と同じ値が現れました。

アルゴリズムは同じなので，これ以降得られる値もすべて $\sqrt{2}-1$ ということになります。

(2) **定数列となるような a を考えろということで，最終的な結論に $a=\sqrt{2}-1$ が入ってくることは** (1) **の結果から予測できます。**

他にもこのようなものがないかを潰すのが本問の趣旨です。

任意の n に対して $a_n=a$ なので，特に $a_1=a$，$a_2=a$ である必要が出てきます。(全称命題としての考え方)

$a_1=a$，すなわち $\langle a\rangle = a$ ということから，$0 \leqq a < 1$ です。
条件も加味すれば，$\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$ となりますが，実際にこの等号は成り立ちません。($a=\dfrac{1}{3}$ としてみると題意を満たさないことが容易に確認できます。)

$a_2=a$，すなわち $\langle\dfrac{1}{a}\rangle = a$ ということになり，先ほどの $\dfrac{1}{3} < a < 1$ という範囲から得られる $1 < \dfrac{1}{a} < 3$ を用いると，整数部分が限られます。

整数部分が得られれば，小数部分も得られるので，この後は手なりに進んでいきます。

(3) **具体的に実験してみようと思います。試しに $a=\dfrac{8}{5}$ としてみます。**

$a_1 = \langle\dfrac{8}{5}\rangle = \langle 1+\dfrac{3}{5}\rangle = \langle\dfrac{3}{5}\rangle = \dfrac{3}{5}$

$a_2 = \langle\dfrac{5}{3}\rangle = \langle 1+\dfrac{2}{3}\rangle = \langle\dfrac{2}{3}\rangle = \dfrac{2}{3}$

$a_3 = \langle\dfrac{3}{2}\rangle = \langle 1+\dfrac{1}{2}\rangle = \langle\dfrac{1}{2}\rangle = \dfrac{1}{2}$

$a_4 = \langle 2\rangle = 0$ で，これ以降 $a_5 = a_6 = \cdots\cdots = 0$

と確かに，$q=5$ としているこの設定で，a_5 以降が 0 となっています。

ひとまず分かったこととしては

0 が現れる現象は

$\begin{cases} \dfrac{1}{\text{整数}} \text{ が現れると，次の項が〈整数〉となって } 0 \cdots (☆) \\ 0 \text{ の項が現れると (ii) によって次の項が } 0 \cdots (★) \end{cases}$

という 2 パターンあることが分かりました。

(★) はこのルール的に当然なので，本問の証明において大切なのは (☆) という現象によって 0 が生じるという部分でしょう。

そうなると，いつか $\dfrac{1}{\text{整数}}$ という形が現れることを示すことになることを睨みたくなるでしょう。

そこで，先ほどの実験の a_1，a_2，$\cdots$ の分子に注目してみると確かに減少しています。

方向性としては分子が減っていって，いずれ 1 となるということを示したくなります。

$a_n = \dfrac{y_n}{x_n}$ などと設定し，この数列 $\{y_n\}$ が単調減少数列であることを示すことにします。

ざっくり言えば

$a_{n+1} = \langle\dfrac{x_n}{y_n}\rangle = \langle Q_n + \dfrac{R_n}{y_n}\rangle = \dfrac{R_n}{y_n}$ **(R_n は x_n を y_n で割った余り)**

である一方，$a_{n+1} = \dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}}$ なので，$\dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \dfrac{R_n}{y_n}$

と，漸化式的なものが得られます。

単純に分母・分子を比較するわけにもいきません。($\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4}$ のような例があるためです。)

なので，これらが既約分数であることなどにも触れながら論述していきます。

【解答】

(1) $a_1=\langle\sqrt{2}\rangle=\sqrt{2}-1$

$a_2=\langle\frac{1}{\sqrt{2}-1}\rangle=\langle\sqrt{2}+1\rangle=(\sqrt{2}+1)-2=\sqrt{2}-1\,(=a_1)$

つまり，これ以降全て a_1 と同じである。

よって数列 $\{a_n\}$ は一般項 $a_n=\sqrt{2}-1$ で与えられる定数列。… 答

(2) $a_1=a$ である必要があり，$a_1=\langle a\rangle$ なので，条件 $a\geqq\frac{1}{3}$ も考えると $\frac{1}{3}\leqq a<1$ である。

$a=\frac{1}{3}$ とすると，$a_1=\frac{1}{3}$，$a_2=\langle 3\rangle=0$ となり題意を満たさない。

ゆえに，等号成立はありえず，$\frac{1}{3}<a<1$ …①

また，$a_2=\langle\frac{1}{a}\rangle$ であり，$a_2=a$ でもあるため，$\langle\frac{1}{a}\rangle=a$

① より $1<\frac{1}{a}<3$ であり，$\frac{1}{a}$ の整数部分は 1 または 2

(Ⅰ) $\frac{1}{a}$ の整数部分が 1 のとき

$\langle\frac{1}{a}\rangle=\frac{1}{a}-1$ であり，$\frac{1}{a}-1=a$

これを整理すると $a^2+a-1=0$ で，① も考えると

$$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

このとき，$a_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$a_2=\langle\frac{2}{\sqrt{5}-1}\rangle=\langle\frac{\sqrt{5}+1}{2}\rangle=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=a_1$

となり，a_3 以降の値も $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ という一定値となる。

(Ⅱ) $\frac{1}{a}$ の整数部分が 2 のとき

$\langle\frac{1}{a}\rangle=\frac{1}{a}-2$ であり，$\frac{1}{a}-2=a$

これを整理すると $a^2+2a-1=0$ で，① も考えると

$$a=-1+\sqrt{2}$$

(1) より，この数列 $\{a_n\}$ は定数列である。

以上 (Ⅰ), (Ⅱ) から求める a の値は $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$-1+\sqrt{2}$ … 答

(3) $a_q=0$ が示せたら，(ii) よりそれ以降の $a_{q+1}, a_{q+2}, \cdots$ は全て 0 となり，題意が示せたことになる。

$a_q=0$ となるケースは

$a_1\sim a_{q-1}$ が正で，a_q で初めて 0 になるケース

$a_1\sim a_{q-1}$ のどこかで 0 となっていて，それ以降 0 となっていて特に $a_q=0$ となっているケース

の 2 パターンある。

まとめると

$$a_1>0,\ a_2>0,\ \cdots\cdots,\ a_{q-1}>0,\ a_q>0\ \cdots(*)$$

ということが起こらないことを示せばよい。

$(*)$ と仮定すると，$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_q$ は全て 1 未満の正の有理数。

そこで，$1\leqq n\leqq q$ を満たす n に対して，

$a_n=\frac{y_n}{x_n}$ (x_n, y_n は $1\leqq y_n<x_n$ …(☆) を満たす互いに素な正の整数)

と表す。

このとき，

$a_{n+1}=\langle\frac{x_n}{y_n}\rangle$

$=\langle Q_n+\frac{R_n}{y_n}\rangle$ (x_n を y_n で割った商を Q_n，余りを R_n とする)

$=\frac{R_n}{y_n}$ (∵ Q_n は整数で，$1\leqq R_n\leqq y_n-1$)

一方，$a_{n+1}=\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}$ (x_{n+1}, y_{n+1} は互いに素な正の整数)

ユークリッドの互除法より

$$1=(x_n,\ y_n \text{ の最大公約数})=(y_n,\ R_n \text{ の最大公約数})$$

これより，$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}$，$\frac{R_n}{y_n}$ は既約分数であるため，$\begin{cases} x_{n+1}=y_n \\ y_{n+1}=R_n \end{cases}$

ゆえに，$x_{n+1}-x_n=y_n-x_n<0$ (∵(☆)) で，$x_{n+1}<x_n$

すなわち，$x_{n+1}\leqq x_n-1$

$$x_q\leqq x_{q-1}-1\leqq x_{q-2}-2\leqq\cdots\leqq x_1-(q-1)=1\ (\because\ x_1=q)$$

つまり，$x_q\leqq 1$ で，x_q は正の整数であるため $x_q=1$

これより，$a_q=\frac{y_q}{x_q}=y_q$ となり，a_q は整数である。

しかし，$a_q=\langle\frac{1}{a_{q-1}}\rangle$ であり，$0\leqq a_q<1$ であるため，a_q が整数だと，$a_q=0$ となるしかないが，$(*)$ であることに矛盾する。

以上から，$(*)$ が起こることはなく，$a_q=0$ であるため，題意は示された。

【総括】

本問の

逆数をとり，その小数部分を考える

という作業は連分数展開と対応しています。

仮分数を帯分数に直すとは，

$$\frac{p}{q}=\frac{qQ+R}{q}=Q+\frac{R}{q}=\text{商}+\boxed{\frac{\text{余り}}{q}}$$

であり，の部分が小数部分です。

例えば，

$$\frac{8}{5}=1+\underset{\text{小数部分}}{\boxed{\frac{3}{5}}}=1+\underset{\text{逆数をとって}}{\frac{1}{\frac{5}{3}}}=1+\frac{1}{1+\underset{\text{小数部分}}{\boxed{\frac{2}{3}}}}=1+\underset{\text{逆数をとって}}{\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\underset{\text{小数部分}}{\boxed{\frac{1}{2}}}}}$$

というイメージです。

また，この操作は，

順次仮分数を帯分数に直す

という操作でもあり，毎回毎回商と余りを求めていくことから

「ユークリッドの互除法」とも対応しています。

本問で示した内容は，

p，q の最大公約数を求めるための互除法による割り算は q 回以内に終わる

ということを意味します。

例えば，35678392043 と 36477 の最大公約数を求めたければ

36477 回以内の割り算で終わることを意味します。

ただし，実はこの回数は甘く，実際には 25 回以内の割り算で互除法によるプロセスは終わります。

これについては以下の

ラメの定理

a，b を $a>b$ なる自然数として，小さいほうの b の桁数を M とするとき，ユークリッドの互除法により最大公約数を求めるアルゴリズムの回数は

高々 $5M$ 回

が有名です。

(上の例だと，36477 は 5 桁なので，25 回以内で終わるわけです。)