(1)　α，β を互いに素な正の整数とする。

(i)　$\alpha x-\beta y=0$ の整数解を全て求めよ。

(ii)　$\dfrac{\alpha}{\beta}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}$ (a_1，a_2，a_3，a_4 は正の整数)

と表せたとする。$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}$ を通分して得られる分子 $a_1a_2a_3+a_1+a_3$ を p，分母 a_2a_3+1 を q とするとき，$\alpha q-\beta p$ の値を求めよ。

(2)　$157x-68y=3$ の整数解を全て求めよ。

＜ '93 早稲田大 ＞

【戦略】

(1) (i)　$\alpha x=\beta y$ **で，**αx **が** β **の倍数となりますが，**α，β **は互いに素なので** x **が** β **の倍数となるしかありません。**

よって，$x=\beta k$ **と表せます。**

このとき，$\alpha\beta k=\beta y$ **であり，**$y=\alpha k$ **ということになります。**

(1) (ii)　$\dfrac{\alpha}{\beta}$ **を正則連分数展開するときを考えるわけです。**

腕力で押し切ることも可能でしょうが，本問の趣旨ではありません。

有理数の正則連分数展開の手順と，ユークリッドの互除法のプロセスがリンクするということを実感してみましょう。

(2)　**もちろん** (1) **の利用を考えます。**

157 **と** 68 **は互いに素なので，**$157x-68y=1$ **となる特殊整数解** (x, y) **がいるはずです。**

それを見つけて辺々 3 **倍すれば** $157x-68y=3$ **の特殊整数解も見つかります。**

(1) **の** (ii) **の結果から** $\alpha q-\beta p=1$ **です。**

$\alpha=157$，$\beta=68$ **とすれば，**$157q-68p=1$ **であり，**p，q **を得るには** $\dfrac{157}{68}$ **を正則連分数展開すればよいことになります。**

【解答】

(1)　(i)　$\alpha x=\beta y$ であり，α，β は互いに素な正の整数であることから

$$(x, y)=(\beta k, \alpha k)\ (k\text{ は任意の整数})\ \cdots\text{答}$$

(2)　(ii)　α を β で割った商を a_1 と呼び，余りを r_1 とする。
β を r_1 で割った商を a_2 と呼び 余りを r_2 とする。
r_1 を r_2 で割った商を a_3 と呼び，余りを r_3 とする。
r_2 を r_3 で割ったときに割り切れる。

このとき，

$$\alpha=\beta a_1+r_1\ (1\leqq r_1\leqq\beta-1)\ \cdots①$$
$$\beta=r_1a_2+r_2\ (1\leqq r_2\leqq r_1-1)\ \cdots②$$
$$r_1=r_2a_3+r_3\ (1\leqq r_3\leqq r_2-1)\ \cdots③$$
$$r_2=r_3a_4\ \cdots④$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=a_1+\frac{r_1}{\beta}=a_1+\cfrac{1}{\cfrac{\beta}{r_1}}\ \cdots①'$$
$$\frac{\beta}{r_1}=a_2+\frac{r_2}{r_1}=a_2+\cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}\ \cdots②'$$
$$\frac{r_1}{r_2}=a_3+\frac{r_3}{r_2}=a_3+\cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}\ \cdots③'$$
$$\frac{r_2}{r_3}=a_4\ \cdots④'$$

であり，①′，②′，③′，④′ より $\dfrac{\alpha}{\beta}$ は

$$\frac{\alpha}{\beta}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}$$

の形で表される。

一般に 2 つの正整数 M，N の最大公約数を $G(M, N)$ と表すことにすると，ユークリッドの互除法により，

$$G(\alpha, \beta)=G(\beta, r_1)=G(r_1, r_2)=G(r_2, r_3)=r_3$$

α，β は互いに素なので，$r_3=1$

$$\begin{aligned}\alpha q-\beta p&=(\beta a_1+r_1)(a_2a_3+1)-\beta(a_1a_2a_3+a_1+a_3)\quad(\because ①)\\&=r_1a_2a_3+r_1-\beta a_3\\&=r_1a_2a_3+r_1-(r_1a_2+r_2)a_3\quad(\because ②)\\&=r_1-r_2a_3\\&=r_3\quad(\because ③)\\&=1\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{157}{68}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}$

(1) の (ii) で考えた p，q はこの場合

$$p=2\cdot3\cdot4+2+4=30,\quad q=3\cdot4+1=13$$

(1) の (ii) の結果から，$157\cdot13-68\cdot30=1$

$$\begin{cases}157x-68y=3 & \cdots⑤\\ 157\cdot39-68\cdot90=3 & \cdots⑥\end{cases}$$

⑤−⑥ より $157(x-39)-68(y-90)=0$

157，68 は互いに素なので，k を整数として

$$(x-39,\ y-90)=(68k,\ 157k)$$

ゆえに，$(x,\ y)=(68k+39,\ 157k+90)$ (k は任意の整数)… 答

【総括】

結局本問は何が言いたいかということを考えてみます。

$\alpha x+\beta y=1$ の特殊整数解を見つける際

$$\alpha=\beta a_1+r_1\quad(1\leqq r_1\leqq\beta-1)\ \cdots①$$

$$\beta=r_1a_2+r_2\quad(1\leqq r_2\leqq r_1-1)\ \cdots②$$

$$r_1=r_2a_3+1\ \cdots③$$

$$r_2=a_4\ \cdots④$$

を得ます。(【解答】で $r_3=1$ を得たくだりから分かるように，ユークリッドの互除法がバックボーンとなって，いつか余り 1 が登場します。)

これを逆に辿っていくと

$$\begin{aligned}1&=r_1-a_3r_2\quad(③\text{ を用いた})\\&=r_1-a_3(\beta-r_1a_2)\quad(②\text{ を用いた})\\&=(a_2a_3+1)r_1-a_3\beta\\&=(a_2a_3+1)(\alpha-\beta a_1)-a_3\beta\\&=\underbrace{(a_2a_3+1)}_{\text{本問における }q}\alpha-\underbrace{(a_1a_2a_3+a_1+a_3)}_{\text{本問における }p}\beta\end{aligned}$$

という式が成立するわけです。

これは，$\alpha x-\beta y=1$ の特殊整数解として

$(x,\ y)=(a_2a_3+1,\ a_1a_2a_3+a_1+a_3)$ がある

ということを意味します。

一方 ①，②，③，④ という関係式から

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta}&=a_1+\cfrac{1}{\cfrac{\beta}{r_1}}\\&=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}}\\&=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{r_2}}}\\&=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}\end{aligned}$$

という形で $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が正則連分数展開できます。

$\alpha x-\beta y=1$ の特殊整数解

$$(x,\ y)=(a_2a_3+1,\ a_1a_2a_3+a_1+a_3)$$

は一見すると，何これという形をしているけど

$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}$ という連分数を整理したときに現れる形ですよ

ということを意味しています。（ $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}=\dfrac{a_1a_2a_3+a_1+a_3}{a_2a_3+1}$ ）