実数 a，b，c に対して，$-1 \leqq x \leqq 1$ …① において

$$-1 \leqq ax^2+bx+c \leqq 1$$

が成り立つならば，① において

$$-4 \leqq 2ax+b \leqq 4$$

が成り立つことを証明せよ。

＜ '81 学習院大 ＞

【戦略】

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，今回示すべき不等式 $2ax+b$ は $f'(x)$ というのが目に付くでしょうか。

$$|f'(x)| \leqq 4 \ (-1 \leqq x \leqq 1)$$

であることが今回示すべき不等式です。

$y=f'(x)$ のグラフが直線であることを考えると，区間の両端の代入値である $|f'(-1)|$，$|f(1)|$ について

$$|f'(-1)| \leqq 4 \ \text{かつ} \ |f'(1)| \leqq 4$$

が言えれば十分です。

今手元にある条件は $|f(x)| \leqq 1$ ということです。

この条件はいわば「f への代入値」に関する条件です。

そこで，係数 a，b，c を f への代入値によって表すことを考えます。

代入値としては $f(1)$，$f(0)$，$f(-1)$ で考えれば十分です。

f のまま考えてもいいですが，敢えて $f(1)=p$，$f(0)=q$，$f(-1)=r$ とおきなおしてみます。

まとめると，$f(x)=ax^2+bx+c$，$f'(x)=2ax+b$ に現れる

係数 a，b，c を，代入値 p，q，r で表す

という作戦です。

はっきり言って，初見では厳しい発想になります。

【解答】

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくとき，$f'(x)=2ax+b$

① に対して $-1 \leqq f(x) \leqq 1$ であるとき，① において $|f'(x)| \leqq 4$ であることを示せばよく，$y=f'(x)$ のグラフが直線であることを考えると

$$|f'(-1)| \leqq 4 \ \text{かつ} \ |f'(1)| \leqq 4$$

を示せばよい。

さて，今 $f(1)=p$，$f(0)=q$，$f(-1)=r$ とすると，条件から

$$\begin{cases} |p| \leqq 1 \\ |q| \leqq 1 \quad \cdots (*) \\ |r| \leqq 1 \end{cases}$$

が成立する。

$$今，\begin{cases} p=a+b+c \ \cdots ② \\ q=c \ \cdots ③ \\ r=a-b+c \ \cdots ④ \end{cases}$$

②＋④ より，$p+r=2a+2c$ であり，

$$\begin{aligned} a &= \frac{p+r}{2}-c \\ &= \frac{p+r}{2}-q \ (\because ③) \end{aligned}$$

②－④ より，$p-r=2b$ であり，$b=\dfrac{p-r}{2}$

$$\begin{aligned} |f'(1)| &= |2a+b| \\ &= \left|2\left(\frac{p+r}{2}-q\right)+\frac{p-r}{2}\right| \\ &= \left|\frac{3}{2}p-2q+\frac{1}{2}r\right| \\ &\leqq \left|\frac{3}{2}p\right|+|-2q|+\left|\frac{1}{2}r\right| \\ &\leqq \frac{3}{2}+2+\frac{1}{2} \ (\because (*)) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f'(-1)| &= |-2a+b| \\ &= \left|-2\left(\frac{p+r}{2}-q\right)+\frac{p-r}{2}\right| \\ &= \left|-\frac{1}{2}p+2q-\frac{3}{2}r\right| \\ &\leqq \left|-\frac{1}{2}p\right|+|2q|+\left|-\frac{3}{2}r\right| \\ &\leqq \frac{1}{2}+2+\frac{3}{2} \ (\because (*)) \\ &= 4 \end{aligned}$$

以上から，$|f'(1)| \leqq 4$ かつ $|f'(-1)| \leqq 4$ が示され，題意も示された。

【総括】

本問の【戦略】を支えるのはラグランジュの補間法と呼ばれるものです。

$f(1)=p$, $f(0)=q$, $f(-1)=r$ を満たす２次式 $f(x)$ は

$$f(x)=\frac{p\,x(x+1)}{(1-0)(1+1)}+\frac{q\,(x-1)(x+1)}{(0-1)(0+1)}+\frac{r\,x(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}$$

と表現できます。(ラグランジュの補間法と言います)

これを整理すると

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{p}{2}x(x+1)-q(x+1)(x-1)+\frac{r}{2}x(x-1)\\&=\left(\frac{p}{2}-q+\frac{r}{2}\right)x^2+\left(\frac{p}{2}-\frac{r}{2}\right)x-q\end{aligned}$$

となり，【解答】で言うところの

$$\begin{cases}a=\dfrac{p}{2}-q+\dfrac{r}{2}\\ b=\dfrac{p}{2}-\dfrac{r}{2}\\ c=q\end{cases}$$

となります。

本問は古典的な問題であり，

a , b , c ではなく，p , q , r で表現する

という発想は初見では厳しいものがあります。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

【ウンチク】

マルコフの定理

高々 n 次の整式 $f(x)$ に対して

$-1\leqq x\leqq 1$ において $|f(x)|\leqq M$, $|f'(x)|\leqq M'$ が成り立つとき

$$M'\leqq n^2 M$$

が成り立つ

というものがあります。

本問は $n=2$ のときの証明ということになります。