特殊な置換を用いた極限

2つの数列 $\{\theta_n\}$，$\{a_n\}$ を漸化式

$$\theta_1=\frac{\pi}{4},\quad \theta_{n+1}=\frac{\pi-\theta_n}{2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$a_1=\sqrt{2},\quad a_{n+1}=\sqrt{|2-a_n|}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定義するとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ。また $0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\cos\theta_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta_n}{2}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ。

(3) $2\cos\theta_n=a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ の値を求めよ。

＜ ’16 宮城教育大 ＞