数列 $\{a_n\}$ の項が

$$a_1=\sqrt{2}\,,\quad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

によって与えられているものとする。このとき，

$$a_n=2\sin\theta_n\,,\quad 0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$$

を満たす θ_n を見いだせ。また，$\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n$ を求めよ。

＜ '75 東京大 ＞

【戦略】

$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ という数列 $\{a_n\}$ に対する漸化式を，

$$a_n=2\sin\theta_n\,,\quad 0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$$

という置き換えを考えることにより，数列 $\{\theta_n\}$ についての漸化式を求めにいきたいわけです。

手なりに $2\sin\theta_{n+1}=\sqrt{2+2\sin\theta_n}$ とし，$\sqrt{\quad}$ を外すために両辺 2 乗して整理すると

$$\cos 2\theta_{n+1}=-\sin\theta_n$$

という式までは行きつけると思います。

ここからが問題ですが，

両辺お揃いの服を着せて，中身比べ

という三角関数の方程式を扱う常套手段で処理したいと思います。
（常套手段と言えど，結構差が付きます）

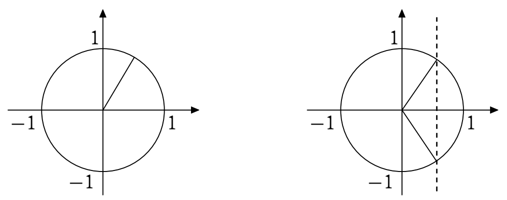
今回は，$\cos 2\theta_{n+1}=-\sin\theta_n$ を

$$\cos 2\theta_{n+1}=\cos\left(\theta_n+\frac{\pi}{2}\right)$$

と無理やり cos の服を着せて，両辺お揃いの服にします。

cos が等しいとは

動径が一致　　　または　　　符号違い



ですが，今回は範囲的に動径が一致するしかありません。

【解答】

$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ に対して，$a_n=2\sin\theta_n\ \left(0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$2\sin\theta_{n+1}=\sqrt{2+2\sin\theta_n}$$

両辺 2 乗して整理すると

$$4\sin^2\theta_{n+1}=2(1+\sin\theta_n)$$

次数を落とす目的の半角公式

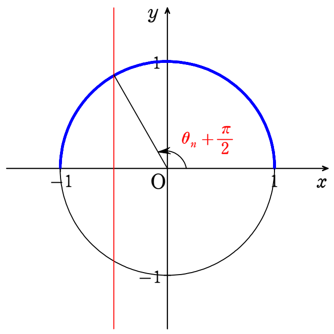
$$2\cdot\frac{1-\cos 2\theta_{n+1}}{2}=1+\sin\theta_n$$

$$\cos 2\theta_{n+1}=-\sin\theta_n$$

同じ cos の服を着せる

$$\cos 2\theta_{n+1}=\cos\left(\theta_n+\frac{\pi}{2}\right)$$

$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\theta_{n+1}<\dfrac{\pi}{2}$ であるので，$0<2\theta_{n+1}<\pi$，$\dfrac{\pi}{2}<\theta_n+\dfrac{\pi}{2}<\pi$



ゆえに，$2\theta_{n+1}=\theta_n+\dfrac{\pi}{2}$ が成立する。

これより，$\theta_{n+1}=\dfrac{1}{2}\theta_n+\dfrac{\pi}{4}$，すなわち $\theta_{n+1}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\theta_n-\dfrac{\pi}{2}\right)$

ここで，$a_1=\sqrt{2}$ であり，$2\sin\theta_1=\sqrt{2}\ \left(0<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}\right)$

これを満たす θ_1 は $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\theta_n-\frac{\pi}{2}&=\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\&=-\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

したがって，$\theta_n=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ …答

また，$\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=\dfrac{\pi}{2}$ …答

【総括】

三角関数の処理の部分に差が付く要素があり，例題と比べると難易度は高いと思います。

なお，$a_n=2\sin\theta_n$ とおくためには，$0<a_n<2$ である必要があります。

これを示す手段は，やはり数学的帰納法でしょう。

$0<a_k<2$ と仮定すると，$a_k=2\cos\theta_k{}'$ $\left(0<\theta_k{}'<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおけるため，

$$a_{k+1}=\sqrt{2(1+\cos\theta_k{}')}=\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\theta_k{}'}{2}}=2\cos\frac{\theta_k{}'}{2}$$

なので，$0<a_{k+1}<2$ も成立し，帰納的に $0<a_n<2$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ が成立するため，あらためて，$a_n=2\sin\theta_n$ とおけるわけです。

ちなみにですが本問は

「この数字だからこの置き換えができる」

ことになります。

例えば，$a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して，$a_n=3\sin\theta_n$

と置いたとしても

$$3\sin\theta_{n+1}=\sqrt{3(1+\sin\theta_n)}$$

$$3\sin^2\theta_{n+1}=1+\sin\theta_n$$

$$3\cdot\frac{1-\cos 2\theta_{n+1}}{2}=1+\sin\theta_n$$

となり，定数項が残ってしまい，上手くいきません。

ちなみに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2\sin\theta_n=2\cdot\sin\frac{\pi}{2}=2$ ということになります。

書き下すと，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}=2$ ということです。

【参考】

例題同様，$a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ をノーヒントで求めてみます。

仮に，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ とすると，$\alpha=\sqrt{2+\alpha}$ から $\alpha^2-\alpha-2=0$

すなわち，$(\alpha-2)(\alpha+1)=0$ で，明らかに $\alpha>0$ ですから $\alpha=2$ を得ます。

つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$ であることが予想されます。

そこで，$|a_{n+1}-2|$ を計算していきましょう。

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-2|&=|\sqrt{a_n+2}-2|\\&=\frac{|a_n-2|}{\sqrt{a_n+2}+2}\\&<\frac{1}{2}|a_n-2|\end{aligned}$$

ですから，$0\leqq|a_n-2|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-2|$ となります。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-2|=0$ ですから，はさみうちの原理より

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-2|=0$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$ となるわけです。

東大が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ ではなく，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n$ の方を訊いているのは，本問の趣旨からして三角関数の運用の方を見たかったことの現れかなと思います。