2つの数列 $\{\theta_n\}$, $\{a_n\}$ を漸化式

$$\theta_1=\frac{\pi}{4},\ \theta_{n+1}=\frac{\pi-\theta_n}{2}\ (n=1,2,3,\cdots)$$
$$a_1=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\sqrt{|2-a_n|}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定義するとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ。また $0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\cos\theta_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta_n}{2}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(3) $2\cos\theta_n=a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(4) $\lim_{n\to\infty}a_n$ の値を求めよ。

＜ '16 宮城教育大 ＞

【戦略】

(1) **与えられた漸化式 $\theta_{n+1}=-\frac{1}{2}\theta_n+\frac{\pi}{2}$ は特性方程式を用いて処理するド定番の漸化式で，落とすことは許されません。**

後半の不等式証明も，漸化式が手元にあるわけですから数学的帰納法でチャッチャと仕留めます。

(2) $\cos\theta_{n+1}=\cos\left(-\frac{1}{2}\theta_n+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\theta_n}{2}$ **となりますが，証明すべき結論を見ると，半角公式がトドメとなることが想像つきます。**

(3) **やはり手元にある漸化式を活かす方針と言えば数学的帰納法でしょう。**

(4) **ここまで丁寧な誘導があればオマケのような設問です。**

【解答】

(1) $\theta_{n+1}=-\frac{1}{2}\theta_n+\frac{\pi}{2}$ であり，$\theta_{n+1}-\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}\left(\theta_n-\frac{\pi}{3}\right)$

ゆえに，

$$\theta_n-\frac{\pi}{3}=\left(\theta_1-\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=-\frac{\pi}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

これより，$\theta_n=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$$=\frac{\pi}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\ \cdots 答$$

次に，$0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$ であることを n についての数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき $\theta_1=\frac{\pi}{4}$ であり，$0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$ は成り立つ。

(ii) $n=k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき

$0<\theta_k<\frac{\pi}{2}$ $(k=1,2,\cdots)$ が成立すると仮定すると

$$\theta_{k+1}=-\frac{1}{2}\theta_k+\frac{\pi}{2}>-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}>0$$

一方，$\frac{\pi}{2}-\theta_{k+1}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\theta_k-\frac{\pi}{2}$
$$=\frac{1}{2}\theta_k$$
$$>0$$

ゆえに，$0<\theta_{k+1}<\frac{\pi}{2}$ も成立する。

以上 (i), (ii) から，$n=1,2,\cdots$ に対して $0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$ が成立する。

(2) $\cos\theta_{n+1}=\cos\left(-\frac{1}{2}\theta_n+\frac{\pi}{2}\right)$

$$=\sin\frac{\theta_n}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos\theta_n}{2}}\quad\left(\because\ \text{半角の公式 及び (1) より}\sin\frac{\theta_n}{2}>0\right)$$

となり，題意は示された。

(3) $2\cos\theta_n=a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)\cdots(*)$ を n についての数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1=\sqrt{2}\ ,\ 2\cos\theta_1=2\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

ゆえに，$2\cos\theta_1=a_1$ であり，$(*)$ は成り立つ。

[2]　$n=k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$2\cos\theta_k=a_k$ が成り立つと仮定する。

$$a_{k+1}=\sqrt{|2-a_k|}$$
$$=\sqrt{|2-2\cos\theta_k|}$$
$$=\sqrt{2\,|1-\cos\theta_k|}$$
$$=\sqrt{2}\ \sqrt{1-\cos\theta_k}\quad(\because\ 1-\cos\theta_k\geqq 0)$$
$$=\sqrt{2}\ \sqrt{2}\ \cos\theta_{k+1}\quad(\because (2)\text{の結果})$$
$$=2\cos\theta_{k+1}$$

本当は $0<\theta_k<\frac{\pi}{2}$ なので等号は成立しませんが絶対値を外すだけなのでラフに評価しました。

ゆえに，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する。

よって，[1]，[2] から，$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して $(*)$ が成立することが示された。

(4)　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2\cos\theta_n)$ $(\because$ (3) の結果 $)$

$$=\lim_{n\to\infty}\ 2\cos\frac{\pi}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\quad(\because (1)\text{の結果})$$
$$=2\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=1\ \cdots 答$$

【総括】

$a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{|2-a_n|}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ に対して，$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

と誘導なしで訊かれたら，
$$a_n=2\cos\theta_n$$
とおき，$\theta_{n+1}=-\frac{1}{2}\theta_n+\frac{\pi}{2}$ という関係式を自力で見出さなければならないというハードルがのしかかってくるため，難易度が上がるでしょう。

もちろん「$a_n=2\cos\theta_n$ とおき」と簡単に言っていますが，こう置くためには $-2\leqq a_n\leqq 2$ の範囲に a_n が存在することを言わなければなりません。
（実質は $0<a_n<2$ の範囲であることをいう必要があるわけです。）

実際には $0<a_k<2$ と仮定すると，$a_k=2\cos\theta_k\left(0<\theta_k<\frac{\pi}{2}\right)$ と表せ，
$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\sqrt{|2-a_k|}\\&=\sqrt{|2(1-\cos\theta_k)|}\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos\theta_k}\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\sin^2\frac{\theta_k}{2}}\\&=2\sin\frac{\theta_k}{2}\end{aligned}$$
となり，$0<a_{k+1}<2$ が成立するため，帰納的に $0<a_n<2$ であることが言えます。

というか，
$a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{|2-a_n|}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ に対して，$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

という問題に対して，$a_n=2\cos\theta_n\left(0<\theta_n<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくこと自体，初見では無理です。

本問は丁寧な誘導が付いていたため，標準的な練習問題と言ってよいと思います。

【参考】

$a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{|2-a_n|}$ $(n=1，2，3，\cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

という問題に対して，ノーヒントだった場合の対応を考えてみます。

少し邪推ですが，もし極限が存在するとしたら $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ とすると

$\alpha=\sqrt{|2-\alpha|}$ ということで，$\alpha^2=|2-\alpha|$

すなわち $\alpha^2=|\alpha-2|\left(=\begin{cases}\alpha-2 & (\alpha\geqq 2)\\ -\alpha+2 & (\alpha<2)\end{cases}\right)$ と言えます。

$\alpha\geqq 2$ のとき $\alpha^2-\alpha+2=0$ で，$\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$ (不適)

$\alpha<2$ のとき $\alpha^2+\alpha-2=0$，すなわち $(\alpha-1)(\alpha+2)=0$ で，$\alpha=1$ を得ます。

つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ と予想できるわけです。

もちろんこれは「極限が存在したら，その極限値は1」ということなので

きっちり仕留めるためには，はさみうちの原理で仕留めます。

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-1|&=\left|\sqrt{|2-a_n|}-1\right|\\&=\left|\frac{|2-a_n|-1}{\sqrt{|2+a_n|}+1}\right|\\&=\left|\frac{(2-a_n)-1}{\sqrt{|2+a_n|}+1}\right| \quad (\because\ 【総括】で示したように\ 0<a_n<2)\\&=\frac{|1-a_n|}{\sqrt{|2+a_n|}+1}\\&<\frac{1}{\sqrt{3}}|a_n-1|\end{aligned}$$

なので，$0\leqq|a_n-1|<\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}|a_1-1|$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}|a_1-1|=0$ なので，はさみうちの原理から

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-1|=0$ で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ が言えることになります。