正方形を折ったときの重なりの五角形

　一辺の長さが 1 の正方形の紙を 1 本の線分に沿って折り曲げたとき，二重になる部分の多角形を P とする。P が線対称な五角形になるように折り曲げるとき，P の面積の最小値を求めよ。

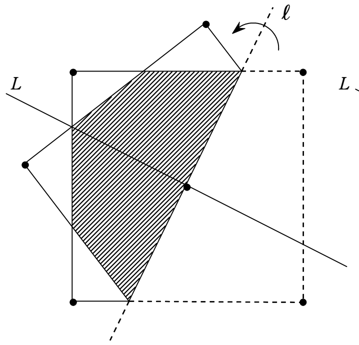
< ’01 東京工業大 >

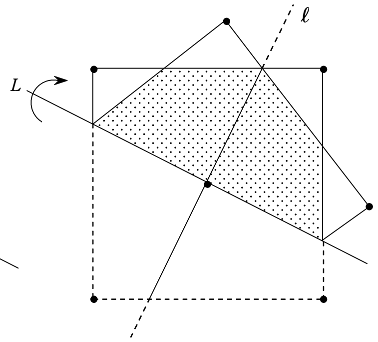
【戦略】

折り返した頂点が折り返す前と折り目に関して対称であることをまずはとっかかりとします。

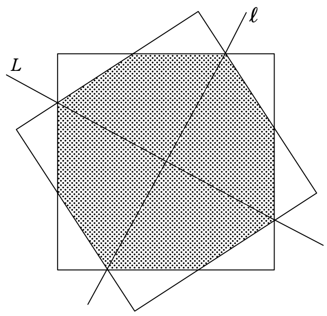
すると，P の対称軸 (L) が折り目 (ℓ) の垂直二等分線であることが見えてきます。

逆にその P の対称軸 (L) について折り返したときは，もとの折り目 (ℓ) が P の対称軸となります。





ℓ，L で分けられる
右の 4 つのエリアは
全て合同な図形ということになり，
結局は，正方形の回転によって
重なる部分の半分が今回の線対称な
五角形ということになります。



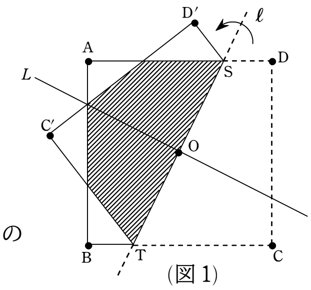
【解答】

折り目が正方形の中心を通るとき，P は線対称な図形となる。

注：ここでは正方形の中心とは対角線の交点 (正方形の内接円の中心) を表すものとする。

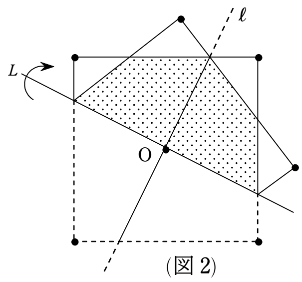
この正方形を ABCD とし
辺 AD 上の点 S，辺 BC 上の点 T に
対して，直線 ST (以下 ℓ と呼ぶ) を軸
に頂点 C，D を含む側を(図 1) のように
折り返したとする。

このとき，(図 1) の O は正方形 ABCD の
内接円の中心である。



(図 1)

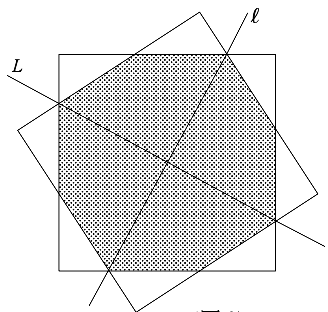
一方，L も O を通るので
L について (図 2) のように
折り返したときの P の対称軸は
ℓ となる。



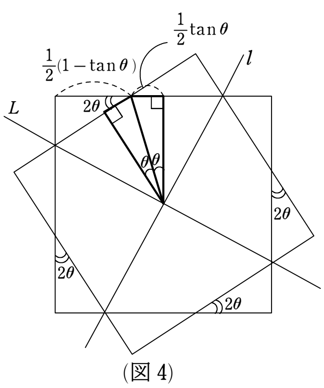
(図 2)

つまり
ℓ，L で分けられる
右の (図 3) の 4 つのエリアは
全て合同な図形である。

ゆえに
正方形の回転によって
重なる部分の半分が題意の
五角形であり，その最小値
を求めればよい。



(図 3)



(図 4)

(図 4) のように $2\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ 回転させたとする。

P の面積を X とおくと，

$$2X=(\text{正方形の面積})-\left\{\frac{1}{2}\times\frac{1-\tan\theta}{2}\times\frac{1-\tan\theta}{2}\tan 2\theta\right\}\times 4$$
$$=1-\frac{\tan\theta\,(1-\tan\theta\,)}{1+\tan\theta}$$
$$=\frac{\tan^2\theta+1}{\tan\theta+1}$$
$$=\tan\theta-1+\frac{2}{\tan\theta+1}$$
$$=(\tan\theta+1)+\frac{2}{\tan\theta+1}-2$$

よって

$$X=\frac{1}{2}\left\{(\tan\theta+1)+\frac{2}{\tan\theta+1}\right\}-1$$

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ より，$\tan\theta+1>0$ であり，相加平均，相乗平均の関係から

$$\tan\theta+1+\frac{2}{\tan\theta+1}\geqq 2\sqrt{2}$$

よって，$X\geqq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-1$

等号成立は $\tan\theta+1=\frac{2}{\tan\theta+1}$ のとき

このとき

$$(\tan\theta+1)^2=2$$

$\tan\theta+1>0$ より，$\tan\theta+1=\sqrt{2}$

$$(0<\ )\ \tan\theta=\sqrt{2}-1\ \left(<\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

よってこれを満たす θ は $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ に存在する。

ゆえに P の面積の最小値は $\sqrt{2}-1$ …答

【総括】

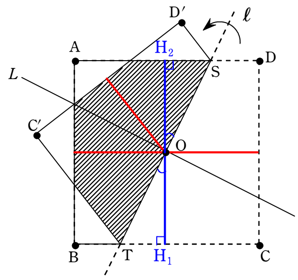
対称性に甘えた記述になっているかもしれませんが，あまりゴチャゴチャ書きすぎるのも冗長になってしまいます。

懸念すべきは【解答】冒頭の

折り目が正方形の中心 O を通る

という部分でしょう。

これについてきちんと論述しようと思ったら，正方形の各辺と O との距離に注目すればよいと思います。



直線 C′D′ と直線 AB は L に関して対称です。

L 上の任意の点からのこの 2 直線への距離は常に等しいため

直線 C′D′ と O との距離＝直線 AB と O との距離

また，線分 CD を ℓ について折り返して線分 C′D′ となっているので

直線 CD と O との距離 ＝直線 C′D′ と O との距離

一方，$\triangle \mathrm{OTH_1}$ と $\triangle \mathrm{OSH_2}$ について，この 2 つの三角形は相似です。

さらに O は線分 ST の中点であるため相似比は 1 : 1 であるため，合同です。

したがって $\mathrm{OH_1}=\mathrm{OH_2}$ です。

このことから，O は

$$\begin{cases}\text{直線 AB，CD からの距離が等しい}\\ \text{直線 BC，DA からの距離が等しい}\end{cases}$$

ということになり，正方形の中心であることになります。