1辺の長さが 10 cm の正三角形 ABC の内部に 1 点 P をとる。図形を折り曲げて 3 つの頂点がすべて P と重なるようにする。

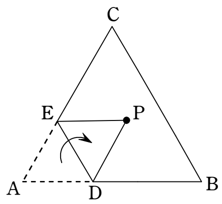
折り曲げられた図形が 6 辺形となるような P の存在する範囲を求め，境界線を含めたその図形の面積を計算せよ。

＜ '82 法政大 ＞

【戦略】

試しに一つの頂点 A を P に重ねてみます。

「折り目 DE は線分 AP の垂直二等分線」
ということぐらいは分かりますが，この段階で本問の急所に迫れる何かが得られるとは言えません。

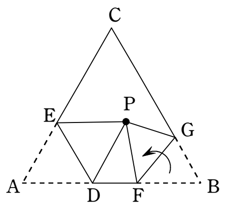


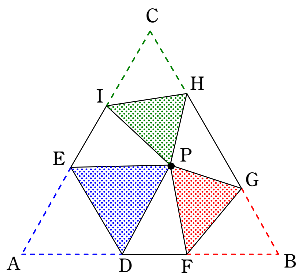
もういっちょ，B を重ねてみます。

ここで題意の「6 辺形」の一部が見えてきます。

と同時に，6 辺形の辺の構造が見えてきます。

ここまできたら最後の C も重ねてみると



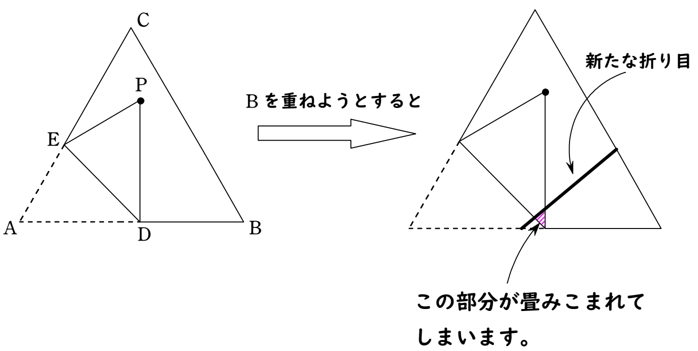


このような 6 辺形ができるわけですが，この 6 辺形を構成している辺は

$$\begin{cases} \text{折り目 DE, FG, HI} \\ \text{元々の正三角形の辺の一部 DF, GH, IE} \end{cases}$$

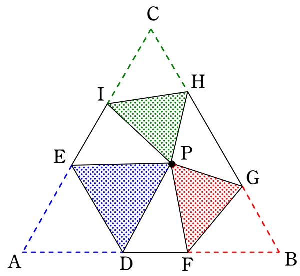
です。

変な位置に P があるとき，



結局は折り目の直線 DE，FG，HI が正三角形の外側で交点をもてばよいことになります。

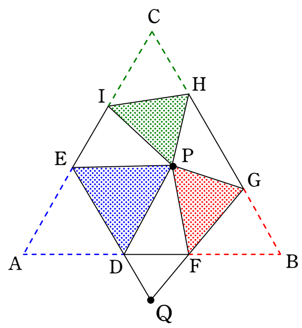
【解答】



頂点 A を P に重ねたときの折り目を線分 DE
頂点 B を P に重ねたときの折り目を線分 FG
頂点 C を P に重ねたときの折り目を線分 HI

とする。

ここで，直線 DE，FG の交点を Q とする。



直線 DE は，線分 AP の垂直二等分線なので，直線 DE 上の点である Q に対して

$$QA = QP \quad \cdots ①$$

一方，直線 FG は，線分 BP の垂直二等分線なので，直線 FG 上の点である Q に対して

$$QB = QP \quad \cdots ②$$

①，② より，$QA = QB = QP$ であり，Q は △ABP の外心である。

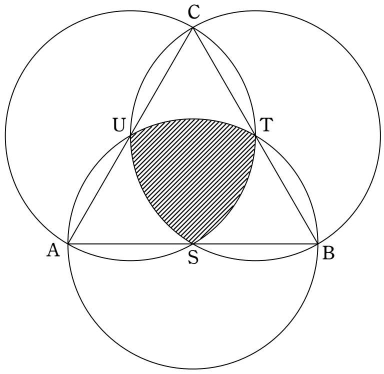
題意の 6 辺形ができるためには Q は △ABP の外部に存在しなければならない。

つまり，$\angle APB > \dfrac{\pi}{2}$ が成立する。

これは，P が線分 AB を直径とする円の内部に存在することを意味する。

同様に，P は線分 BC，CA を直径とする円の内部に存在することにもなる。

以上から，点 P の存在範囲は以下の図の斜線部分。



その面積は

$$(\text{扇形 STU})\times 3-(\text{正三角形 STU})\times 2$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \frac{\pi}{3}\right)\times 3-\left(\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)\times 2$$

$$=\frac{25}{2}\pi-\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{25}{2}(\pi-\sqrt{3})$$【 cm^2】 …答

【総括】

一気に重ねようとすると混乱のもとで，一つずつ重ねようとしていくうちに構造が見えてきます。

【戦略】でも触れていますが，

「こうすれば題意を満たす」というよりは

「こうなっちゃうとヤバイ」

という方向 (必要条件的な考え方) で頭を動かすと本問の急所部分が見えてきやすいと思います。

ちなみに今回の P の存在範囲が表す図形は「ルーローの三角形」と呼ばれる有名な図形です。