n を正の整数とし，n^2+3 と $n+1$ の最大公約数を d_n とおく。

(1) d_n は 1，2，4 のいずれかであることを示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{610} d_n$ を求めよ。

(3) 次の極限値を求めよ。 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k$

＜ ’12 東京都立大 改 ＞

【戦略】

(1) **2つの整数 K，L $(K>L)$ の最大公約数を $G(K,\ L)$ と表します。**

$d_1=G(4,\ 2)=2$ ，$d_2=G(7,\ 3)=1$，$d_3=G(12,\ 4)=4$
$d_4=G(19,5)=1$，$d_5=G(28,\ 6)=2$，$d_6=G(39,\ 7)=1$
$d_7=G(52,\ 8)=4$，$d_8=G(67,\ 9)=1$，$d_9=G(84,\ 10)=2$

と確かに 1，2，4 のいずれかになっています。

最大公約数に迫る一つの武器が「ユークリッドの互除法」です。

$$n^2+3=(n+1)(n-1)+4$$

ですから，$d_n=G(n^2+3,\ n+1)=G(n+1,\ 4)$ となり，
d_n は $n+1$ と 4 の最大公約数と等しいことになります。

(2) **上記実験から，数列 $\{d_n\}$ は 2，1，4，1 の繰り返しということが分かります。**

もちろん，証明が必要です。方針としては n を 4 で割った余りで分類するのが自然でしょうか。

この周期性を認めれば，$610=4\cdot152+2$ ですから

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{610} d_n&=\sum_{m=1}^{152}(d_{4m-3}+d_{4m-2}+d_{4m-1}+d_{4m})+d_{609}+d_{610}\\&=(2+1+4+1)\cdot152+2+1\\&=1219\end{aligned}$$

と解決です。

(3) **n を 4 で割った余りで分類して考えます。**

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k$ **とおくと，**

$$\begin{aligned}&S_{4M}=(2+1+4+1)M=8M\\&S_{4M+1}=(2+1+4+1)M+2=8M+2\\&S_{4M+2}=(2+1+4+1)M+2+1=8M+3\\&S_{4M+3}=(2+1+4+1)M+2+1+4=8M+7\end{aligned}$$

なので，$T_n=\dfrac{1}{n}S_n$ とおくと

$$T_{4M}=\frac{8M}{4M}=2,\ T_{4M+1}=\frac{8M+2}{4M+1},\ T_{4M+2}=\frac{8M+3}{4M+2},\ T_{4M+3}=\frac{8M+7}{4M+3}$$

で，$n\to\infty$ のとき $M\to\infty$ ですから，いずれにせよ $T_n\to2$

となり解決です。

【解答】

(1) 2つの整数 K，L の最大公約数を $G(K,\ L)$ と表す。

$n^2+3=(n+1)(n-1)+4$ であるため，ユークリッドの互除法から

$$G(n^2+3,\ n+1)=G(n+1,\ 4)$$

ゆえに，$d_n=G(n+1,\ 4)$ …①

特に，d_n は 4 の約数でもあるため，$d_n=1$，2，4 のいずれかということになる。

(2) $d_1=G(4,\ 2)=2$ ，$d_2=G(7,\ 3)=1$，$d_3=G(12,\ 4)=4$
$d_4=G(19,5)=1$，$d_5=G(28,\ 6)=2$，$d_6=G(39,\ 7)=1$
$d_7=G(52,\ 8)=4$，$d_8=G(67,\ 9)=1$，$d_9=G(84,\ 10)=2$

より，数列 $\{d_n\}$ は 2，1，4，1 の繰り返しであることが予想できる。

① より，m を正の整数として

$$\begin{cases}d_{4m-3}=G(4m-2,\ 4)=G(2(2m-1),\ 4)=2\\d_{4m-2}=G(4m-1,\ 4)=1\\d_{4m-1}=G(4m,\ 4)=4\\d_{4m}=G(4m+1,\ 4)=1\end{cases}\quad\cdots(*)$$

ゆえに，数列 $\{d_n\}$ は 2，1，4，1 を繰り返す数列である。

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{610} d_n&=\sum_{m=1}^{152}(d_{4m-3}+d_{4m-2}+d_{4m-1}+d_{4m})+d_{609}+d_{610}\\&=(2+1+4+1)\cdot152+2+1\\&=1219\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k$ とおく。

M を非負整数として，$(*)$ に注意すると

$$\begin{aligned}&S_{4M}=\sum_{m=1}^{M}(d_{4m-3}+d_{4m-2}+d_{4m-1}+d_{4m})=(2+1+4+1)M=8M\\&S_{4M+1}=S_{4M}+d_{4M+1}=8M+2\\&S_{4M+2}=S_{4M+1}+d_{4M+2}=8M+3\\&S_{4M+3}=S_{4M+2}+d_{4M+3}=8M+7\end{aligned}$$

を得る。

$T_n=\dfrac{1}{n}S_n$ とおくと，求めるものは $\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n$ である。

$$T_{4M}=\frac{8M}{4M}=2,\ T_{4M+1}=\frac{8M+2}{4M+1},\ T_{4M+2}=\frac{8M+3}{4M+2},\ T_{4M+3}=\frac{8M+7}{4M+3}$$

$n\to\infty$ のとき $M\to\infty$ であり，このとき $r=0,\ 1,\ 2,\ 3$ として

$$T_{4M+r}\to2$$

以上から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=2$，すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k=2$ …答

【戦略 2】(2) の周期性を示す部分について

周期性を示すために，$d_{n+4}=d_n$ を示すというのもよくやる策です。

$$G(n+5\,,\,4)=G(n+1\,,\,4)$$

が示されれば解決です。

M を N で割った商を Q，余りを R としたとき，つまり，

$$M=NQ+R$$

としたとき

$$G(M\,,\,N)=G(N\,,\,R)$$

としていますが，ユークリッドの互除法においては商，余りに拘らず単純に $M=NQ+R$ という関係であるなら $G(M\,,\,N)=G(N\,,\,R)$ が成り立ちます。

例えば，$48=10\cdot 4+8$ なので，$G(48\,,\,10)=G(10\,,\,8)=2$ ですが

$48=10\cdot 3+18$ とも表せます(この場合余りとは呼びませんが)

なので，$G(48\,,\,10)=G(10\,,\,18)$($=G(18\,,\,10)$)$=2$ も成立するわけです。

【解 2】(2)

$n+5=4\cdot 1+(n+1)$ なので，$G(n+5\,,\,4)=G(4\,,\,n+1)$ であり，

$$d_{n+4}=d_n$$

$$d_1=G(4\,,\,2)=2\ ,\ d_2=G(7\,,\,3)=1\ ,\ d_3=G(12\,,\,4)=4\ ,\ d_4=G(19\,,5)=1$$

以上から，数列 $\{d_n\}$ は 2，1，4，1 を繰り返す数列である。

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{610} d_n &= \sum_{m=1}^{152}(d_{4m-3}+d_{4m-2}+d_{4m-1}+d_{4m})+d_{609}+d_{610}\\ &=(2+1+4+1)\cdot 152+2+1\\ &=1219\ \cdots \text{答}\end{aligned}$$

【戦略 3】(3) について

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k$ は場合分けをせずに一つの式でまとめられないということで

等式でなく不等式を繋ぎ，はさみうちの原理で仕留めるという方向性も考えられます。

【解 3】(3) について

n を 4 で割った商を m，余りを r とすると $n=4m+r$

$$(2+1+4+1)m \leqq S_n \leqq (2+1+4+1)m+(2+1+4)$$

すなわち，

$$8m \leqq S_n \leqq 8m+7$$

$$\frac{1}{n}\cdot 8m \leqq \frac{1}{n}S_n \leqq \frac{1}{n}(8m+7)$$

$$\frac{1}{n}(2n-2r) \leqq \frac{1}{n}S_n \leqq \frac{1}{n}(2n-2r+7)$$

$$2-\frac{2r}{n} \leqq \frac{1}{n}S_n \leqq 2+\frac{7-2r}{n}$$

$r=0\,,\,1\,,\,2\,,\,3$ のいずれかなので，

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2r}{n}\right)=2\,,\ \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{7-2r}{n}\right)=2$$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n=2$ $\cdots$ 答

【総括】

「結論は出せるけど，記述がしにくい」というタイプの問題でしょうか。

原題は

(1)　d_1，d_2，d_3，d_4，d_5 を求めよ。

(2)　$(n^2+3)-(n-1)(n+1)=4$ を用いて，d_n は 1，2，4 のいずれかであることを示せ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{610} d_n$ を求めよ。

(4)　次の極限値を求めよ。$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} d_n$

というものでした。

余計なお世話かなという部分はカットし，アルファベットの使い方が気持ち悪かったので少し修正した感じです。