a , b を $a<b$ を満たす実数とする。

微分可能な関数 $f(x)=e^x$ に対して平均値の定理より

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

すなわち

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^c$$

となる c が $a<c<b$ の範囲に存在する。

このとき，

$$\frac{a+b}{2}<c$$

が成り立っていることを示せ。

【戦略】

素直に差をとるわけですが，

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^c$$

という関係式を用いて，文字消去を試みたいと思います。

なので，示すべき不等式 $c-\frac{a+b}{2}>0$ **を，** $e^c-e^{\frac{a+b}{2}}>0$ **と見て**

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}-e^{\frac{a+b}{2}}>0$$

を目指します。

この左辺は

$$e^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{1}{b-a}e^{\frac{b-a}{2}}-\frac{1}{b-a}e^{\frac{a-b}{2}}-1\right)=\frac{e^{\frac{a+b}{2}}}{b-a}\left\{e^{\frac{b-a}{2}}-e^{\frac{a-b}{2}}-(b-a)\right\}$$

と変形できますから， $\frac{b-a}{2}=p\ (>0)$ **などとおくことで**

$$\frac{e^{\frac{a+b}{2}}}{2p}\left(e^p-e^{-p}-2p\right)$$

と見れるため，結局， $e^p-e^{-p}-2p>0$ **が示せればよく，**

$$g(x)=e^x-e^{-x}-2x\ \ (x>0)$$

と設定し，微分すると $g'(x)=e^x+e^{-x}-2$ **を得ますが，相加平均・相乗平均の関係から即座に** $g'(x)\geqq 0$ **を得て，** $g(x)$ **が単調増加であることが分かりますから，** $g(p)>g(0)=0$ **となり解決します。**

【解答】

$e^{\frac{a+b}{2}}<e^c$，すなわち

$$e^{\frac{a+b}{2}}<\frac{e^b-e^a}{b-a}\ \cdots(*)$$

を示せばよい。

$$\frac{1}{b-a}e^b-\frac{1}{b-a}e^a-e^{\frac{a+b}{2}}=e^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{1}{b-a}e^{\frac{b-a}{2}}-\frac{1}{b-a}e^{\frac{a-b}{2}}-1\right)$$
$$=\frac{e^{\frac{a+b}{2}}}{b-a}\left\{e^{\frac{b-a}{2}}-e^{\frac{a-b}{2}}-(b-a)\right\}$$

$\frac{b-a}{2}=p\ (p>0)$ とおくと，

$$\frac{1}{b-a}e^b-\frac{1}{b-a}e^a-e^{\frac{a+b}{2}}=\frac{e^{\frac{a+b}{2}}}{2p}\left(e^p-e^{-p}-2p\right)\cdots①$$

$g(x)=e^x-e^{-x}-2x\ (x>0)$ とおくと

$$g'(x)=e^x+e^{-x}-2$$

相加平均・相乗平均の関係より，

$$e^x+e^{-x}\geqq 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2\ (\text{等号成立は}\ x=0\ \text{のとき})$$

ゆえに，$x>0$ では $g'(x)>0$ であり，$g(x)$ は単調増加。

$p>0$ より，$g(p)>g(0)=0$

① より，

$$\frac{1}{b-a}e^b-\frac{1}{b-a}e^a-e^{\frac{a+b}{2}}=\frac{e^{\frac{a+b}{2}}}{2p}g(p)>0$$

ゆえに，$(*)$ が示され，題意は示された。

【戦略 2】

$$\frac{1}{b-a}e^{b}-\frac{1}{b-a}e^{a}-e^{\frac{a+b}{2}}=e^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{1}{b-a}e^{\frac{b-a}{2}}-\frac{1}{b-a}e^{\frac{a-b}{2}}-1\right)$$
$$=\frac{e^{\frac{a+b}{2}}}{b-a}\left\{e^{\frac{b-a}{2}}-e^{\frac{a-b}{2}}-(b-a)\right\}$$

と見ることが出来なかった場合のリカバリー策です。

少なくとも

$$e^{c}-e^{\frac{a+b}{2}}=\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}-e^{\frac{a+b}{2}}$$
$$=\frac{e^{b}-e^{a}-(b-a)e^{\frac{a}{2}}\cdot e^{\frac{b}{2}}}{b-a}$$

ぐらいまではいけるはずです。

$a<b$ **という条件から，分母が正ですから**

$$e^{b}-e^{a}-(b-a)e^{\frac{a}{2}}\cdot e^{\frac{b}{2}}>0$$

を示せばよいことは分かるでしょう。

ここからは，独立 2 変数に関する扱いの常套手段である「予選決勝法」で進めていきます。

【解 2】

$$e^{c}-e^{\frac{a+b}{2}}=\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}-e^{\frac{a+b}{2}}$$
$$=\frac{e^{b}-e^{a}-(b-a)e^{\frac{a}{2}}\cdot e^{\frac{b}{2}}}{b-a}\ \cdots ①$$

条件 $a<b$ より，$b-a>0$ …②

ここで，分子の $e^{b}-e^{a}-(b-a)e^{\frac{a}{2}}\cdot e^{\frac{b}{2}}$ について，a を固定し，

$$g(b)=e^{b}-e^{a}-(b-a)e^{\frac{a}{2}}\cdot e^{\frac{b}{2}}\quad (b>a)$$

とおく。

$$g'(b)=e^{b}-e^{\frac{a}{2}}\left\{1\cdot e^{\frac{b}{2}}+(b-a)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}}\right\}$$

$$=e^{\frac{b}{2}}\left\{e^{\frac{b}{2}}-\frac{b-a+2}{2}e^{\frac{a}{2}}\right\}$$

$h(b)=e^{\frac{b}{2}}-\frac{b-a+2}{2}e^{\frac{a}{2}}$ とおくと，

$$h'(b)=\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}}-\frac{1}{2}e^{\frac{a}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{b}{2}}-e^{\frac{a}{2}}\right)>0\ (\because b>a)$$

ゆえに，$h(b)$ は単調増加で $h(b)>h(a)=0$

$g'(b)>0$ が言えるため，$b>a$ の範囲では $g(b)$ は単調増加であり，

$$g(b)>g(a)=0$$

したがって，$e^{b}-e^{a}-(b-a)e^{\frac{a}{2}}\cdot e^{\frac{b}{2}}>0$ …③

①，②，③ より，$e^{c}-e^{\frac{a+b}{2}}>0$，すなわち，$\frac{a+b}{2}<c$ が成立する。

【総括】

昔，私が受験生時代に勉強していた本に載っていた問題です。

受験生当時，色々策に拘った挙句，ギブアップした私は解答を見たわけですが，その解答は

$$c=\log\frac{e^{b}-e^{a}}{b-a}$$
$$=\log\frac{\int_a^b e^{x}\,dx}{b-a}$$
$$=\log\left\{\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{a+\frac{b-a}{n}k}\right)\right\}$$

と，区分求積法を逆に見る解答が載っており，「これは思いつかんわ」と唸った記憶があります。

どうにもこうにも悔しかったので，絶対もっとシンプルな方針や解答があるはずだと模索した結果が【解 1】【解 2】です。