3つの実数 a, b, c に対して数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=\frac{1}{2}(b+c),\ b_1=\frac{1}{2}(c+a),\ c_1=\frac{1}{2}(a+b)$$

$n=2, 3, \cdots$ に対しては

$$a_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}+c_{n-1}),\ b_n=\frac{1}{2}(c_{n-1}+a_{n-1}),\ c_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1})$$

このとき，$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

＜ '08 信州大 改 ＞

【戦略】

対称性が目に付きます。

したがって，操作的にもそれを意識して，$a_n+b_n+c_n$ を計算したくなるでしょう。

計算してみると，

$$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$$

を得るため，数列 $\{a_n+b_n+c_n\}$ は定数列であることが分かります。

$$\begin{aligned}a_n+b_n+c_n&=a_1+b_1+c_1\\&=a+b+c\end{aligned}$$

を得ます。

ここからですが，$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めるにあたり，数列 $\{a_n\}$ をターゲットに考えます。

連立漸化式の基本は文字消去なので，b_n, c_n を消すことを考えたくなります。

そうなると

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+c_n)\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

および

$$b_n+c_n=(a+b+c)-a_n$$

に注目すれば

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{1}{2}\{-a_n+(a+b+c)\}\\&=-\frac{1}{2}a_n+\frac{a+b+c}{2}\end{aligned}$$

というド定番の形の2項間漸化式が現れます。

【解答】

$$\begin{cases}a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(b_n+c_n)\ \cdots①\\[2mm] b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(c_n+a_n)\ \cdots② \quad (n=1, 2, 3, \cdots)\\[2mm] c_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)\ \cdots③\end{cases}$$

①+②+③ より

$$\begin{aligned}a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}&=\frac{1}{2}\{(b_n+c_n)+(c_n+a_n)+(a_n+b_n)\}\\&=\frac{1}{2}(2a_n+2b_n+2c_n)\\&=a_n+b_n+c_n\end{aligned}$$

これより，数列 $\{a_n+b_n+c_n\}$ は n によらない定数列であり

$$\begin{aligned}a_n+b_n+c_n&=a_1+b_1+c_1\\&=\frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{2}(c+a)+\frac{1}{2}(a+b)\\&=a+b+c\ \cdots④\end{aligned}$$

④ より $b_n+c_n=-a_n+(a+b+c)$

① に代入して

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{1}{2}\{-a_n+(a+b+c)\}\\&=-\frac{1}{2}a_n+\frac{a+b+c}{2}\end{aligned}$$

これは

$$a_{n+1}-\frac{a+b+c}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{a+b+c}{3}\right)$$

と変形できる。

ゆえに，$a_n-\dfrac{a+b+c}{3}=\left(a_1-\dfrac{a+b+c}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

すなわち　$a_n=\dfrac{a+b+c}{3}+\left(a_1-\dfrac{a+b+c}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

これより，$\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{a+b+c}{3}$ …答

【総括】

もちろん

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{a+b+c}{3}\ ,\ \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{a+b+c}{3}$$

ということも言えます。

なお，原題は

(1)　$a_n + b_n + c_n = a+b+c$，$2a_n - b_n - c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2a-b-c)$ を示せ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

というものでした。

(1) の前半の式は【解答】 ④ に相当します。

後半の式も普通に計算すれば

$$\begin{aligned} 2a_{n+1} - b_{n+1} - c_{n+1} &= (b_n + c_n) - \frac{1}{2}(c_n + a_n) - \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ &= -a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ &= -\frac{1}{2}(2a_n - b_n - c_n) \end{aligned}$$

で，数列 $\{2a_n - b_n - c_n\}$ は初項 $2a_1 - b_1 - c_1\left(=-a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c\right)$，

公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列なので

$$\begin{aligned} 2a_n - b_n - c_n &= \left(-a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{2}(2a-b-c)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2a-b-c) \end{aligned}$$

を得ます。

(1) の誘導があれば，(1) の 2 式を辺々加えれば

$$3a_n = a+b+c+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(2a-b-c)$$

$$a_n = \frac{a+b+c}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{2a-b-c}{3}$$

となり，$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a+b+c}{3}$ と即片付きます。

今回は誘導に頼らない方法でも無理がないと判断し，カットしました。