実数 a，b，c は，$1 \geqq a \geqq b \geqq c \geqq \dfrac{1}{4}$ をみたすとする。

$x+y+z=0$ なる実数 x，y，z に対して

$$ayz+bxz+cxy \leqq 0$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどんな時か。

＜ '93 東京都立大 ＞

【戦略 1】

ひとまず愚直に条件を消化しようとする路線である 1 文字消去を試みます。

a，b，c には対称性がないため，どの文字を消しても同じというわけにはいきません。
（本当は対称性はあるのですが，そのことについては【解 3】で）

ひとまず天下り的に感じるかもしれませんが，y を消去します。
（気が付けなかった場合のリカバリーについて【解 2】で）

$y=-(x+z)$ **なので，示すべき不等式は** $-az(x+z)+bzx-cx(x+z) \leqq 0$
すなわち

$$cx^2+(a+c-b)zx+az^2 \geqq 0$$

となります。

ここからは独立 2 変数として予選決勝法で仕留めてもいいですが，少し工夫をし，「同次式」の処理を行います。

$z=0$ **のときは示すべき不等式は** $cx^2 \geqq 0$ **で，明らかに成立します。**

$z \neq 0$ **のときは，示すべき不等式の両辺を** $z^2(>0)$ **で割ると**

$$c\left(\frac{x}{z}\right)^2+(a+c-b)\cdot\frac{x}{z}+a \geqq 0$$

で， $\dfrac{x}{z}=w$ **などとおくと，** $cw^2+(a+c-b)w+a \geqq 0$ **となります。**

よって，任意の実数 w **に対して** $cw^2+(a+c-b)w+a \geqq 0$ **が成立することを示せばよいということになります。**

$c>0$ **なので，** $cw^2+(a+c-b)w+a=0$ **の判別式を** D **とすれば**

$$D=(a+c-b)^2-4ca$$

であり， $D \leqq 0$ **を証明できればいいわけです。**

ここで， $\dfrac{1}{4} \leqq c \leqq b \leqq a \leqq 1$ **であることが効いてきて**

$c \leqq a+c-b \leqq a$ **ということになりますので，**

$$\begin{aligned} D=(a+c-b)^2-4ca &\leqq a^2-4ca \\ &=a(a-4c) \\ &\leqq a\left(1-4\cdot\frac{1}{4}\right)=0 \end{aligned}$$

ということで解決します。

【解 1】

条件 $x+y+z=0$ より，$y=-(x+z)$ であり，示すべき不等式は

$$-az(x+z)+bzx-cx(x+z) \leqq 0$$

これを整理すると

$$cx^2+(a+c-b)zx+az^2 \geqq 0 \quad \cdots (*)$$

(i)　$z=0$ のとき　示すべき不等式は $cx^2 \geqq 0$

これは $c>0$ であること，x が実数であることから成立する。

等号成立は $x=0$ のときで，$z=0$，$x+y+z=0$ も考えると
$x=y=z=0$ のとき

(ii)　$z \neq 0$ のとき　$(*)$ の両辺を $z^2(>0)$ で割ると

$$c\left(\frac{x}{z}\right)^2+(a+c-b)\cdot\frac{x}{z}+a \geqq 0$$

$w=\dfrac{x}{z}$ とおくと，$cw^2+(a+c-b)w+a \geqq 0 \quad \cdots (**)$

ゆえに，任意の実数 w に対して $(**)$ が成立することを示せばよい。

$$cw^2+(a+c-b)w+a=0 \quad \cdots (☆)$$

の判別式を D とする。

$$D=(a+c-b)^2-4ca$$

条件 $c \leqq b \leqq a$ より，$\begin{cases} a-b \geqq 0 \\ c-b \leqq 0 \end{cases}$ であることに注意すると

$$c \leqq c+(a-b) \cdots ①，\quad a+(c-b) \leqq a \quad \cdots ②$$

①，② より $(0<)\,c \leqq a+c-b \leqq a$ であるため，

$$\begin{aligned} D=(a+c-b)^2-4ca &\leqq a^2-4ca \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (★) \\ &=a(a-4c) \\ &\leqq a\left(1-4\cdot\frac{1}{4}\right) \cdots\cdots (★★) \\ &=0 \end{aligned}$$

となり任意の実数 w に対して $(**)$ が成立することが示された。

等号成立は $D=0$ かつ そのときの (☆) の重解が $w=-\dfrac{a+c-b}{2c}$

$D=0$ のとき，$\begin{cases} a+c-b=a & (\leftarrow ★ \text{ の等号成立条件}) \\ a=1 & \\ c=\dfrac{1}{4} & (\leftarrow ★★ \text{ の等号成立条件}) \end{cases}$

これを整理すると $(a, b, c)=\left(1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$

このとき $w=-\dfrac{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{2\cdot\frac{1}{4}}=-2$ で，$\dfrac{x}{z}=-2$（すなわち $x=-2z$）

$y=-x-z=-(-2z)-z=z$ で，$x:y:z=-2:1:1$

以上 (i), (ii) から，題意は示された。

等号成立条件は

「$x=y=z=0$」

または

「$(a, b, c)=\left(1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ かつ $(x, y, z)=(-2k, k, k)$ (k は 0 以外の任意の実数)」

であるとき。

【コメント】

$D=(a+c-b)^2-4ca$ を，

$$D=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$$

とバラしてしまうと身動きが取りづらくなると思います。

【戦略 2】

z を消去すると $-ay(x+y)-bx(x+y)+cxy \leqq 0$ となり

これを【戦略 1】と同様に同次式の処理をして考えると

$$bw^2+(a+b-c)w+a \geqq 0$$

を示すことになり，判別式をとると

$$D=(a+b-c)^2-4ab$$

となります。

ここから

$$\begin{aligned}D&=(a+b-c+2\sqrt{ab})(a+b-c-2\sqrt{ab})\\&=\{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c\}\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-c\}\\&=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})\end{aligned}$$

正　　正　　正

と和と差の積の形に見てやると，$\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ の符号が問題ということになります。

ただ，今は $\dfrac{1}{4} \leqq c \leqq b \leqq a \leqq 1$ なので，$\dfrac{1}{2} \leqq \sqrt{c} \leqq \sqrt{b} \leqq \sqrt{a} \leqq 1$ です。

つまり， $\begin{cases}\sqrt{a} \leqq 1\\ \sqrt{b}+\sqrt{c} \geqq \sqrt{c}+\sqrt{c} \geqq \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1\end{cases}$

ですから，$\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c} \leqq 0$ ということになり，$D \leqq 0$ となります。

【解 2】部分的別解 (z を消去する場合)
(注意：記号や番号の振り方は【解 1】と被っています)

条件 $x+y+z=0$ より，$z=-(x+y)$ であり，示すべき不等式は

$$-ay(x+y)-bx(x+y)+cxy \leqq 0$$

これを整理すると，$bx^2+(a+b-c)xy+ay^2 \geqq 0 \cdots (*)$

$y=0$ のときは示すべき不等式は $bx^2 \geqq 0$ であり，$b>0$ よりこれは成立する。

$y \fallingdotseq 0$ のとき，$(*)$ の両辺を $y^2\ (>0)$ で割ると

$$b\left(\frac{x}{y}\right)^2+(a+b-c)\cdot\frac{x}{y}+a \geqq 0$$

$w=\dfrac{x}{y}$ とおくと，$bw^2+(a+b-c)w+a \geqq 0 \cdots (**)$

ゆえに，任意の実数 w に対して $(**)$ が成立することを示せばよい。

$$bw^2+(a+b-c)w+a=0 \cdots (☆)$$

の判別式を D とする。

$$\begin{aligned}D&=(a+b-c)^2-4ab\\&=(a+b-c+2\sqrt{ab})(a+b-c-2\sqrt{ab})\\&=\{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c\}\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-c\}\\&=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{1}{4} \leqq c \leqq b \leqq a \leqq 1$ より，$\dfrac{1}{2} \leqq \sqrt{c} \leqq \sqrt{b} \leqq \sqrt{a} \leqq 1$

ゆえに，$\begin{cases}\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}>0\\ \sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}>0\\ \sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}>0\end{cases}$

一方，$\begin{cases}\sqrt{a} \leqq 1\\ \sqrt{b}+\sqrt{c} \geqq \sqrt{c}+\sqrt{c} \geqq \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1\end{cases}$ より，$\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c} \leqq 0$

したがって，$D \leqq 0$ となり，任意の実数 w に対して $(**)$ が成立する

等号成立について

$D=0$ のとき，$(a, b, c)=\left(1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$

(以下【解 1】に準ずる)

【コメント】

x を消去するとやはり，【解 1】のようにはうまくいかず，【解 2】の路線でいくことになります。

【戦略 3】

a, b, c に関する大小関係がかえって邪魔です。

そこで，問題文を

> a, b, c を $\frac{1}{4}$ 以上 1 以下の実数とする。
> $x+y+z=0$ なる実数 x, y, z に対して
> $$ayz+bxz+cxy \leqq 0$$
> が成り立つことを示せ。

と，a, b, c に関する大小関係を取っ払って，a, b, c に関する対称性を復活させて考えることにします。

$ayz+bxz+cxy$ は，a, b, c どの文字に注目しても高々 1 次です。

つまり，区間の両端のいずれかで最大となります。

【解 3】

a, b, c を $\frac{1}{4}$ 以上 1 以下の実数として考えて証明できれば十分である。

$P=ayz+bxz+cxy$ とする

P を a の関数と見ると，$a=1, \frac{1}{4}$ のいずれかのときに P は最大となる。

P を b の関数と見ると，$b=1, \frac{1}{4}$ のいずれかのときに P は最大となる。

P を c の関数と見ると，$c=1, \frac{1}{4}$ のいずれかのときに P は最大となる。

ゆえに，P が最大となるとき，

$$\begin{cases} a=b=c=1 \\ a, b, c \text{ のうち 2 つが } 1\text{，1 つが } \frac{1}{4} \\ a, b, c \text{ のうち 1 つが } 1\text{，2 つが } \frac{1}{4} \\ a=b=c=\frac{1}{4} \end{cases}$$

のいずれかである。

(i) $a=b=c=1$ のとき

$$\begin{aligned} P &= xy+yz+zx \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right\} \\ &\leqq \frac{1}{2}(x+y+z)^2 \\ &= 0 \ (\because \text{ 条件 } x+y+z=0) \end{aligned}$$

等号成立は $x=y=z=0$ のとき

(ii) a, b, c のうち 2 つが 1，1 つが $\frac{1}{4}$ のとき

$(a, b, c)=\left(1, 1, \frac{1}{4}\right)$ のとき　$P=yz+zx+\frac{1}{4}xy$

$$\begin{aligned} 4P &= xy+4(x+y)z \\ &= xy+4(x+y)(-x-y) \ (\because \text{ 条件 } x+y+z=0) \\ &= xy-4(x+y)^2 \\ &= xy-4x^2-8xy-4y^2 \\ &= -4x^2-7xy-4y^2 \\ &= -4\left(x+\frac{7}{8}y\right)^2-\frac{15}{16}y^2 \\ &\leqq 0 \end{aligned}$$

となり，$P \leqq 0$ となる。

等号成立は $x=y=0$ のときで，このとき $z=0$

$(a, b, c)=\left(1, \frac{1}{4}, 1\right), \left(\frac{1}{4}, 1, 1\right)$ のときも同様。

(iii) a, b, c のうち 1 つが 1，2 つが $\frac{1}{4}$ のとき

$(a, b, c)=\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ のとき，$P=yz+\frac{1}{4}zx+\frac{1}{4}xy$

$$\begin{aligned} 4P &= 4yz+zx+xy \\ &= 4yz+x(y+z) \\ &= 4yz+(-y-z)(y+z) \ (\because \text{ 条件 } x+y+z=0) \\ &= 4yz-(y+z)^2 \\ &= -(y-z)^2 \\ &\leqq 0 \end{aligned}$$

となり，$P \leqq 0$ となる。

等号成立は $y=z$（$=k$ とおく）のときで，このとき，$x=-2k$

$(a, b, c)=\left(\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right)$ のときも同様。

(iv) $a=b=c=\frac{1}{4}$ のとき

$$P=\frac{1}{4}yz+\frac{1}{4}xz+\frac{1}{4}xy$$

(i) の結果から，$4P \leqq 0$ となるため，$P \leqq 0$ が言える。

等号成立は $x=y=z=0$ のとき

以上から a, b, c を $\frac{1}{4}$ 以上 1 以下の実数として $P \leqq 0$ が示せたので，

特に，$\frac{1}{4} \leqq c \leqq b \leqq a \leqq 1$ のときも $P \leqq 0$ は成立する。

等号成立条件は

「$x=y=z=0$」

または

「$(a, b, c)=\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ かつ $(x, y, z)=(-2k, k, k)$（k は 0 以外の任意の実数）」

であるとき。

【総括】

スムーズに【解 3】のように見ることができればよいのですが，試験場では簡単ではないでしょう。

現実的には文字消去によって進めていく路線が試験場での方針だと思います。

ただ，その文字消去も消去する文字によって通用する態度が変わってきます。

現実的にはあまり深く考えずに z か x を消去する人が多く，y を消して【解 1】の路線で行く人は多くないでしょう。

そういう意味で完答の可能性が高いのは【解 2 】の路線だと思います。

上でやってはいませんが，個人的には x を消去して【解 2】の路線で考えるのが最も簡単に D を評価できると思いますので，ご自身の手を動かして確認してみてください。