$f(x)$ を区間 $(-\infty, \infty)$ において連続で，かつ常に $f(x)>0$ である関数とする。

関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \quad (x \fallingdotseq 0)$$

により定義する。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)=f(0)$ であることを示せ。

(2) $x>0$ で $f(x)$ が増加するならば，$x>0$ で常に $f(x)>g(x)$ であることを示せ。ただし，$x>0$ で $f(x)$ が増加するとは，任意の正の実数 s，t に対し，$s<t$ ならば $f(s)<f(t)$ を満たすときをいう。

(3) $x>0$ で $f(x)$ が増加するならば，$x>0$ で $g(x)$ も増加することを示せ。

＜ '05 神戸大 ＞

【戦略】

(1) **極限の形的には $\infty\cdot 0$ というタイプの不定形です。**

$\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$ **という形で見て** $\dfrac{0}{0}$ **という形の不定形と見た方が不定形解消の手段としては豊富です。**

そうなると，一つの手段として $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ **という微分の定義を用いた路線を思いつきたいところです。**

今回，目がチカチカするので， $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ **とおき，** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x}$ **とします。**

微分の定義で仕留めようと思えば， $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ **と見たくなります。**

なので， $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=h'(0)$ **と行きたくなる気持ちも分かりますが実際に**

> $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ **という極限値が存在したとき，その極限値のことを** $h'(0)$ **と呼ぶ**

というのが本来です。

なので，記述の仕方も注意しながらまとめます。

(2) **定積分を「面積」と捉えると，面積に注目してグラフの概形を書いてみたくなります**

$f(x)>g(x)$，**すなわち** $f(x)>\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ **という示すべき不等式を**

$$xf(x)>\int_0^x f(t)\,dt$$

という形で，定積分を単独で見たくなるでしょうか。

(3) **路線的には** $g'(x)>0$ **を目指すという方向性でよく，手なりに進めていけば (2) が効いてきます。**

【解答】

(1) $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ とおくと，$g(x)=\dfrac{1}{x}h(x)$

$h(0)=0$ に注意すると，$\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ …①

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると

$$h(x)=\Big[F(t)\Big]_0^x=F(x)-F(0)$$

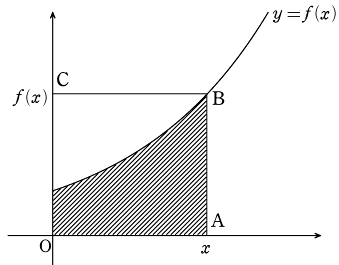
よって

$$\begin{aligned} h'(x)&=F'(x)\\ &=f(x) \quad \cdots② \end{aligned}$$

であり，$h(x)$ は微分可能であり，① は $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)=h'(0)$ となる。

② より，$\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)=f(0)$ となり，題意は示された。

(2)



(図 1)

条件より $f(x)>0$，$f(x)$ が $x>0$ で増加関数であることに注意すると，(図 1) のようになり

(斜線部の面積)<(長方形 OABC の面積)

ゆえに，$\int_0^x f(t)\,dt<xf(x)$ が成立する。

$x>0$ のとき，$\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt<f(x)$，すなわち $g(x)<f(x)$ が成立する。

(3)
$$\begin{aligned} g'(x)&=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}f(x)\\ &=-\frac{1}{x}g(x)+\frac{1}{x}f(x)\\ &=\frac{1}{x}\{f(x)-g(x)\} \end{aligned}$$

$x>0$ で $f(x)$ が増加関数という条件から，(2) より $f(x)-g(x)>0$

が成り立ち，$g'(x)>0$

ゆえに，$x>0$ で $g(x)$ も増加する。

【戦略 2】(2) について

定積分を「原始関数の『差の形』」と見れば，

平均値の定理

が頭をよぎります。

【解 2】(2) について

$$g(x)=\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x-0}$$

$$=\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\quad (\,F(x)\text{ は } f(x)\text{ の原始関数}\,)$$

平均値の定理より

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(c)$$

となる c が $0<c<x$ に存在する。

よって，

$$\begin{cases} g(x)=f(c) & \cdots(\text{ア}) \\ 0<c<x & \cdots(\text{イ}) \end{cases}$$

をともに満たす c が存在する。

$f(x)$ は $x>0$ で単調増加なので，(イ) より $f(c)<f(x)$

(ア) より，$g(x)<f(x)$ となり，題意は示された。

【総括】

【戦略】を読んでいれば分かると思いますが，

「～～と見たくなる」

という気持ちが至る所で出てきます。

その気持ちが方針や路線決定に影響を与えます。