1から9までの番号が1つずつ書かれた9枚のカードから無作為に1枚取り出し，その番号を確認してもとにもどす。この試行を4回行う。

カードに書かれた番号を取り出した順に a_1，a_2，a_3，a_4 とするとき，次の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3，a_4 がすべて異なる確率を求めよ。

(2) a_1，a_2，a_3，a_4 が異なる2種類の番号をそれぞれ2個ずつ含む確率を求めよ。

(3) $a_1<a_2<a_3<a_4$ となる確率を求めよ。

(4) $a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq a_4$ となる確率を求めよ。

＜ '15 滋賀大 ＞

【戦略】

(1) **1回目 … 9通り**
2回目 … 1回目で取った数字以外の8通り
3回目 … 1回目，2回目で取った数字以外の7通り
4回目 … 1回目，2回目，3回目で取った数字以外の6通り

なので， $\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{9\cdot9\cdot9\cdot9}$ **です。**

(2) a，a，b，b **というタイプの取り方を考えます。**

a，b **の決め方は** ${}_9\mathrm{C}_2$ **通りあります。**

$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(a, a, b, b), (a, b, a, b), (a, b, b, a)\cdots$

というように， a，a，b，b **の並べ方である** $\dfrac{4!}{2!\cdot2!}=6$ **【通り】が** (a_1, a_2, a_3, a_4) **に対応します。**

よって，題意を満たす (a_1, a_2, a_3, a_4) **の決め方は** ${}_9\mathrm{C}_2\cdot6$ **【通り】です。**

(3) **使う数字さえ決めてしまえば，大小は小さい方から** a_1，a_2，a_3，a_4 **に対応させるだけです。**

よって， $a_1<a_2<a_3<a_4$ **となる** (a_1, a_2, a_3, a_4) **の決め方は** ${}_9\mathrm{C}_4$ **【通り】ということです。**

(4) **等号が厄介です。**

いわゆる「重複組合せ」というテーマで，

〇と仕切りの並べ方

を題意の (a_1, a_2, a_3, a_4) **の決め方に対応させます。**

【解答】

(1) 4回の取り出し方の総数は 9^4 通り。

a_1，a_2，a_3，a_4 がすべて異なる取り出し方の総数は ${}_9\mathrm{P}_4$【通り】

求める確率は $\dfrac{{}_9\mathrm{P}_4}{9^4}=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{9\cdot9\cdot9\cdot9}=\dfrac{112}{243}$ …答

(2) 2種類の番号の選び方は ${}_9\mathrm{C}_2$【通り】

その並び方（a_1，a_2，a_3，a_4 との対応の仕方）は $\dfrac{4!}{2!\cdot2!}=6$【通り】

求める確率は $\dfrac{{}_9\mathrm{C}_2\cdot6}{9^4}=\dfrac{\dfrac{9\cdot8}{2\cdot1}\cdot6}{9\cdot9\cdot9\cdot9}=\dfrac{8}{243}$ …答

(3) $a_1<a_2<a_3<a_4$ となるような (a_1, a_2, a_3, a_4) の組の決め方は

9個の異なる番号から4つ選び，小さい方から a_1，a_2，a_3，a_4 に対応させればよく，${}_9\mathrm{C}_4$【通り】

求める確率は $\dfrac{{}_9\mathrm{C}_4}{9^4}=\dfrac{\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{9\cdot9\cdot9\cdot9}=\dfrac{14}{729}$ …答

(4) 4個の〇と8本の仕切りを用意する。

この8本の仕切りで9つの領域に分け，その領域に入っている〇の個数が使用する数字の個数に対応するようにする。
（下図のように左側の領域から順に，1の個数，2の個数，…，9の個数という対応を考える。）

1の個数 | 2の個数 | 3の個数 | 4の個数 | 5の個数 | 6の個数 | 7の個数 | 8の個数 | 9の個数

例えば，

〇|〇|||〇|||〇|　→　$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(1, 2, 5, 8)$

||〇〇|〇|||||〇　→　$(a_1, a_2, a_3, a_4)=(3, 3, 4, 9)$

と対応する。

これにより，$a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq a_4$ となる (a_1, a_2, a_3, a_4) の組の決め方は

4個の〇と8本の仕切りの並べ方

に等しく，${}_{12}\mathrm{C}_4$【通り】

求める確率は $\dfrac{{}_{12}\mathrm{C}_4}{9^4}=\dfrac{\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{9\cdot9\cdot9\cdot9}=\dfrac{55}{729}$ …答

【総括】

定期考査レベルではありますが，意外と(3)，(4)は差がついてしまいます。

(4)は $(a_1, a_2, a_3, a_4)=(1, 2, 2, 6)$ のように

・重複が許されている
・(3)のように大小関係は決まっていて使う数字だけが問題(組合せの問題)

という「重複組合せ」の問題です。

重複組合せの対応は

〇と仕切りの並べ方を対応させる

というのが基本です。

「単元学習段階」では上級テーマですが，実戦段階では基本です。

聞けば分かるけど自分でできないという類の話題になります。

「何が〇に対応して何本仕切りを用意すればよいのか」

については自分で考えるクセをつけましょう。