x，y，z 軸上に，3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 3)$がある。線分 AB を $s:1-s$ に内分する点を P とし，線分 PC を $t:1-t$ に内分する点を Q とする。ただし，$0<s<1$，$0<t<1$ である。

(1)　原点を O とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を s，t を用いて表せ。

(2)　Q が原点 O に最も近くなる場合の s と t の値を求めよ。

＜ '97 名古屋大 ＞

【戦略】

(1)　**状況を図に書き，立式します。**

状況的に，P が先に決まり，その P をもとに Q が決まります。

式的にも $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ **と，**$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ **が求まり**

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ **と求めればよいでしょう。**

(2)　OQ **が最小となるときをとらえます。**

(1) **で，**$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}(1-t)(1-s)\\2s(1-t)\\3t\end{pmatrix}$ **と得られますから**

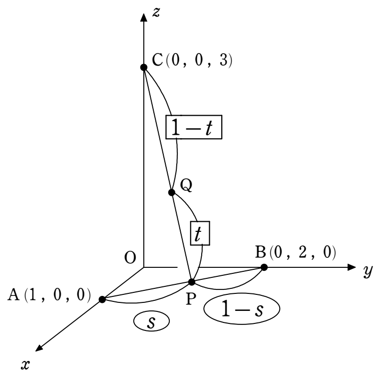
$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=(1-t)^2(1-s)^2+4s^2(1-t)^2+9t^2$$

という 2 変数関数の最小を考えます。

s，t **は独立 2 変数なので，予選決勝法で仕留めます。**

どちらを先に固定するかということですが，t **の方が 3 ヵ所に散らばっていて出しゃばっていますから，**t **の方を固定し** s **の方を動かしていきます。**

【解答】



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$$=(1-s)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-s\\2s\\0\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$=(1-t)\begin{pmatrix}1-s\\2s\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(1-t)(1-s)\\2s(1-t)\\3t\end{pmatrix}\ \cdots 答$$

(2)　(1) より $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=(1-t)^2(1-s)^2+4s^2(1-t)^2+9t^2$

t を固定し，s の式と見なして s について整理すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2&=(1-t)^2\{(1-s)^2+4s^2\}+9t^2\\&=(1-t)^2(5s^2-2s+1)+9t^2\\&=(1-t)^2\left\{5\left(s-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\right\}+9t^2\end{aligned}$$

$(1-t)^2>0$ より，$0<s<1$ において，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2&\geqq\frac{4}{5}(1-t)^2+9t^2\ \left(等号成立は\ s=\frac{1}{5}\ のとき\right)\\&=\frac{49}{5}t^2-\frac{8}{5}t+\frac{4}{5}\\&=\frac{49}{5}\left(t-\frac{4}{49}\right)^2+\frac{36}{49}\\&\geqq\frac{36}{49}\ \left(等号成立は\ t=\frac{4}{49}\ のとき\right)\end{aligned}$$

求めるのは $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ が最小となるような s，t の値であり

$$s=\frac{1}{5},\ t=\frac{4}{49}\ \cdots 答$$

【戦略 2】方針のみ

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=(1-t)^2(1-s)^2+4s^2(1-t)^2+9t^2$$

において，t の関数と見ると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=(5s^2-2s+10)t^2-(10s^2-4s+2)t+5s^2-2s+1$$

というように t の 2 次関数となります。

これを整理すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=(5s^2-2s+10)\left(t-\frac{5s^2-2s+1}{5s^2-2s+10}\right)^2+\frac{9(5s^2-2s+1)}{5s^2-2s+10}$$

$$=(5s^2-2s+10)\left(t-\frac{5s^2-2s+1}{5s^2-2s+10}\right)^2+9\left(1-\frac{9}{5s^2-2s+10}\right)$$

$$=(5s^2-2s+10)\left(t-\frac{5s^2-2s+1}{5s^2-2s+10}\right)^2+9\left(1-\frac{9}{5\left(s-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}\right)$$

となり，$0<\frac{5s^2-2s+1}{5s^2-2s+10}<1$ であることに注意すると

$t=\frac{5s^2-2s+1}{5s^2-2s+10}$ とするのが最善だということになります。

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=9\left(1-\frac{9}{5\left(s-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}\right)$ となります。

s の固定を外し，s を $0<s<1$ で動かしたとき，$s=\frac{1}{5}$ とすれば

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ は最小となるわけです。

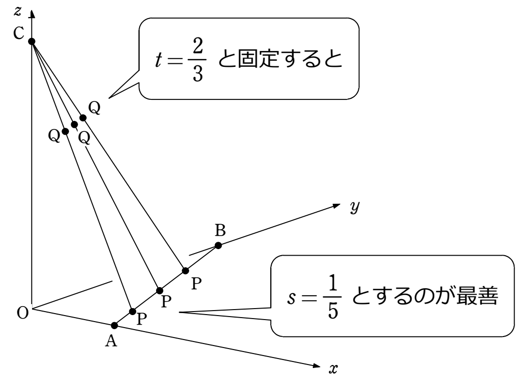
つまり，$s=\frac{1}{5}$，$t=\frac{5\cdot\frac{1}{25}-2\cdot\frac{1}{5}+1}{5\cdot\frac{1}{25}-2\cdot\frac{1}{5}+10}=\frac{4}{49}$ で $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ は最小となります。

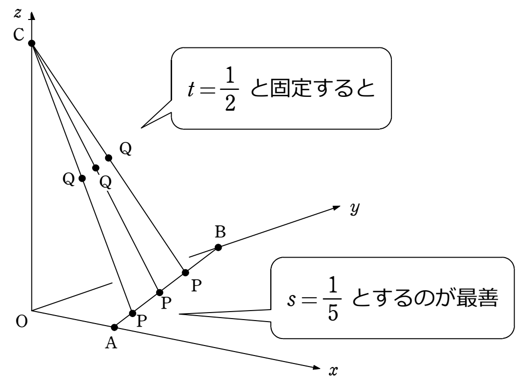
【総括】

s，t のどちらを先に固定するかについては t を先に動かすと割と大変でした。

さて，今回の式的な予選決勝法の処理を図形的に捉え，予選通過者の控室を覗いてみることにします。

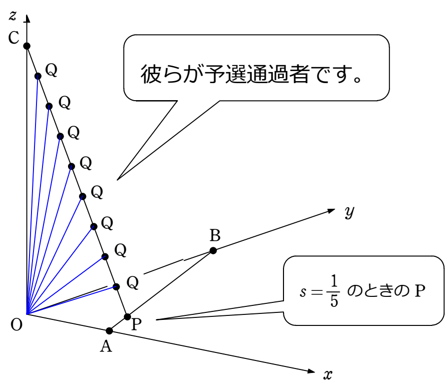
例えば，





このように，何か一つ t の値を固定したとき，$s=\frac{1}{5}$ とするのが最善です。

つまり



その後，固定していた t を動かし，(t を動かすということは Q を動かすということ) 最小値「たち」のなかの最小値を決めるのです。