同次式と対称性

n は 1 より大きい整数とし，$0<x<\dfrac{\pi}{4}$，$0<y<\dfrac{\pi}{4}$ とする。

$\dfrac{\cos^n x+\cos^n y}{(\cos x+\cos y)^n}$ と $\dfrac{\cos^n 2x+\cos^n 2y}{(\cos 2x+\cos 2y)^n}$ の大小を判定せよ。

＜ ’09 早稲田大 ＞

【戦略】

目につくのは x，y の対称性ですから，$0<x\leqq y<\dfrac{\pi}{4}$ として考えても問題ありません。

次に目につくのは $\dfrac{○^n+□^n}{(○+□)^n}$ という形です。

形が同じ 2 数の比較に関しては

「関数を用意して代入値を比較する」

というのが常套手段の 1 つです。

ただ，今回は 2 変数 x，y による値なので，ここをどうするかが山場です。

ここは観察力と経験によりますが，$\dfrac{○^n+□^n}{(○+□)^n}$ という形は

分母，分子の各項が n 次の同次式

です。

$$\frac{○^n+□^n}{(○+□)^n}=\frac{\dfrac{○^n+□^n}{○^n}}{\dfrac{(○+□)^n}{○^n}}=\frac{1+\left(\dfrac{□}{○}\right)^n}{\left(1+\dfrac{□}{○}\right)^n}$$

と見て，$\dfrac{□}{○}=△$ とすることで，$\dfrac{1+△^n}{(1+△)^n}$ と 1 変数化できます。

今回は $\dfrac{\cos y}{\cos x}=u$，$\dfrac{\cos 2y}{\cos 2x}=v$ とおくことで

$$\frac{\cos^n x+\cos^n y}{(\cos x+\cos y)^n}=\frac{1+u^n}{(1+u)^n},\quad \frac{\cos^n 2x+\cos^n 2y}{(\cos 2x+\cos 2y)^n}=\frac{1+v^n}{(1+v)^n}$$

となります。

1 変数化できれば，あとは $f(t)=\dfrac{1+t^n}{(1+t)^n}$ と設定し，増減を調べることで与えられた 2 数を $f(u)$，$f(v)$ と見て大小比較をしていきます。

【解答】

対称性から $0<x\leqq y<\dfrac{\pi}{4}$ …① として考えても一般性を失わない。

$A=\dfrac{\cos^n x+\cos^n y}{(\cos x+\cos y)^n}$，$B=\dfrac{\cos^n 2x+\cos^n 2y}{(\cos 2x+\cos 2y)^n}$ とおく。

条件 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ $\left(0<2x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ から， $\cos x\neq 0$，$\cos 2x\neq 0$

$$A=\frac{\dfrac{(\cos x)^n+(\cos y)^n}{(\cos x)^n}}{\dfrac{(\cos x+\cos y)^n}{(\cos x)^n}}=\frac{1+\left(\dfrac{\cos y}{\cos x}\right)^n}{\left(1+\dfrac{\cos y}{\cos x}\right)^n}$$

$$B=\frac{\dfrac{(\cos 2x)^n+(\cos 2y)^n}{(\cos 2x)^n}}{\dfrac{(\cos 2x+\cos 2y)^n}{(\cos 2x)^n}}=\frac{1+\left(\dfrac{\cos 2y}{\cos 2x}\right)^n}{\left(1+\dfrac{\cos 2y}{\cos 2x}\right)^n}$$

$\dfrac{\cos y}{\cos x}=u$，$\dfrac{\cos 2y}{\cos 2x}=v$ とおくと，

$$A=\frac{1+u^n}{(1+u)^n},\quad B=\frac{1+v^n}{(1+v)^n}$$

$f(t)=\dfrac{1+t^n}{(1+t)^n}$ $(0<t<1)$ とおく。

$$\begin{aligned}
f'(t)&=\frac{nt^{n-1}(1+t)^n-(1+t^n)\cdot n(1+t)^{n-1}}{(1+t)^{2n}}\\
&=\frac{n(1+t)^{n-1}\{t^{n-1}(1+t)-(1+t^n)\}}{(1+t)^{2n}}\\
&=\frac{n(1+t)^{n-1}(t^n-1)}{(1+t)^{2n}}
\end{aligned}$$

$0<t<1$ の範囲では，$f'(t)<0$ となるため，この範囲で $f(t)$ は単調減少。

ここで，

$$\begin{aligned}
v-u&=\frac{\cos 2y}{\cos 2x}-\frac{\cos y}{\cos x}\\
&=\frac{\cos 2y\cos x-\cos y\cos 2x}{\cos 2x\cos x}\\
&=\frac{(2\cos^2 y-1)\cos x-\cos y(2\cos^2 x-1)}{\cos 2x\cos x}\\
&=\frac{2\cos^2 y\cos x-2\cos^2 x\cos y+\cos y-\cos x}{\cos 2x\cos x}\\
&=\frac{2\cos x\cos y(\cos y-\cos x)+(\cos y-\cos x)}{\cos 2x\cos x}\\
&=\frac{(\cos y-\cos x)(2\cos x\cos y+1)}{\cos 2x\cos x}
\end{aligned}$$

このあたりで 怯まないでください

$x=y$ のときに 0 になることから このパーツが登場 することは想定内 です。

① より，$\begin{cases}\cos 2x\cos x>0\\ 2\cos x\cos y+1>0\\ \cos y-\cos x\leqq 0\end{cases}$ であり，$v\leqq u$

これより，$0<u<1$，$0<v<1$ であるため $f(u)\leqq f(v)$

すなわち，$A\leqq B$ である。

以上から，

$\dfrac{\cos^n x+\cos^n y}{(\cos x+\cos y)^n}\leqq\dfrac{\cos^n 2x+\cos^n 2y}{(\cos 2x+\cos 2y)^n}$（等号成立は $x=y$ のとき）…答

【総括】

対称性 , 同次式 , 大小比較 など , 大小さまざまなポイントが襲い掛かってきます。

同次式の難しいところは色々な問題に紛れてポンと出題されたときに

同次式を同次式だと見抜く部分

だと思います。