自然数の２乗となる数を平方数という。

(1)　自然数 a，n，k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ。

(2)　$n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

＜ '17 北海道大 ＞

【戦略】

(1)　**与えられた等式を展開，整理すると**

$$a=(2k-1)n+k^2$$

を得ます。

つまり，a が消去でき，$(2k-1)n+k^2 \geqq k^2+2k-1$ を示せばよいことになります。

(2)　$n(n+1)+14\,(=n^2+n+14)>n^2$ **であることに注意すると**

$n(n+1)+14$ **は n^2 より大きな平方数ということになります。**

したがって，$n(n+1)+14=(n+k)^2$ と表せます。

この k は (1) から $k^2+2k-1 \leqq 14$，すなわち $k^2+2k-15 \leqq 0$ と範囲が絞られますから，あとはしらみつぶしに潰していけばいいでしょう。

【解答】

(1)　$n(n+1)+a=(n+k)^2$ を展開すると $n^2+n+a=n^2+2kn+k^2$

整理すると $a=(2k-1)n+k^2$

$$\begin{aligned} a-(k^2+2k-1) &= (2k-1)n+k^2-(k^2+2k-1) \\ &= (2k-1)n-(2k-1) \\ &= (2k-1)(n-1) \\ &\geqq 0 \quad (\because\ k,\ n \text{ は自然数}) \end{aligned}$$

よって，$a \geqq k^2+2k-1$ が成立する。

(2)　$n(n+1)+14\,(=n^2+n+14)>n^2$ より

$n(n+1)+14$ は n^2 より大きい平方数である。

ゆえに，自然数 k を用いて $n(n+1)+14=(n+k)^2$ …(*) と表せる。

(1) より，この k は $14 \geqq k^2+2k-1$，すなわち

$$k^2+2k-15 \leqq 0$$

を満たす。

この２次不等式は $(k+5)(k-3) \leqq 0$ と変形でき，$-5 \leqq k \leqq 3$

k は自然数であることを考えると，$k=1$，2，3

(i)　$k=1$ のとき

(*) より，$n^2+n+14=(n+1)^2$ で，$n=13$ を得る。

(ii)　$k=2$ のとき

(*) より $n^2+n+14=(n+2)^2$ で，$n=\dfrac{10}{3}$ を得る。(不適)

(iii)　$k=3$ のとき

(*) より，$n^2+n+14=(n+3)^2$ で，$n=1$ を得る。

以上から，求める自然数 n は $n=1$，13 …答

【総括】

(1) という強力な誘導があるため，(2) の方針も無理なく立てられるはずです。

むしろ (1) がなかったらどの程度の難易度になるのかを検証してみます。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

【誘導なしの場合】

$n(n+1)+14$ が平方数であるとき，

$$n(n+1)+14=m^2 \ (m \text{ は正の整数})$$

と表せる。

$$n^2+n+14=m^2$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{55}{4}=m^2$$

変数を 1 ヵ所に集める

$$\left\{2\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}^2+55=4m^2$$

$$(2n+1)^2+55=4m^2$$

$$4m^2-(2n+1)^2=55$$

$$\{2m+(2n+1)\}\{2m-(2n+1)\}=55$$

$2m+2n+1$ は正の整数なので，$2m-(2n+1)$ も正の整数である。

$2m+2n+1>2m-(2n+1)$ であることも考えると，

$$\begin{cases} 2m+2n+1=55 \\ 2m-2n-1=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2m+2n+1=11 \\ 2m-2n-1=5 \end{cases}$$

であり，$(m, n)=(14, 13), (4, 1)$

以上から，求める自然数 n は $n=1, 13$ …答

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

変数を 1 ヵ所に集める手段の 1 つとして「平方完成」があります。

ノーヒントの場合，その山場を超える必要がありますが，平方完成によって変数を集めるということは，合格者にとってのスタンダードです。

この手の問題がノーヒントで出されることも実際にあります。
そこまで含めて視野に入れておくべきでしょう。