

$abcdef=a+b+c+d+e+f$, $a\geq b\geq c\geq d\geq e\geq f$
をみたす自然数 a, b, c, d, e, f について、次の問いに答えよ。

- (1) $bcdef\leq 6$ を示せ。
(2) a, b, c, d, e, f を求めよ。

< '94 同志社大 >

【戦略 1】

- (1) これは $a+b+c+d+e+f\leq a+a+a+a+a+a$

という常套手段を一発かませば

$abcdef\leq 6a$ となり、両辺 $a(>0)$ で割れば $bcdef\leq 6$ を得て解決です。

- (2) (1) から、 (b, c, d, e, f) は絞り込めると言えば絞り込めます。

ただ、しらみつぶしに絞り込むのではなく、もう少し工夫をしたいところです。

注目したいのは $f\leq e\leq d\leq c\leq b$ というこ

d が大きくなってしまうと、 c, b はそれ以上に大きくなってしまうため、 $bcdef$ が 6 を超えてしまいます。

なので、 d はある程度小さく、 e, f はそれ以上に小さいわけです。

仮に $d=2$ としてみると、 $f\leq e\leq 2\leq c\leq b$ です。

$bcdef$ を小さくしようと頑張っても $2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1=8$ となり、6 を超えてしまいます。

$d>3$ なら尚更です。

これにより、 $d=1$ となるしかないため、それ以下の e, f についても $e=f=1$ となります。

あとは結局
$$\begin{cases} abc=a+b+c+3 \cdots \textcircled{1} \\ 1\leq c\leq b\leq a \cdots \textcircled{2} \\ bc\leq 6 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

という残り 3 文字について考えればよいことになります。

ここからは色々考えられますが③ から (b, c) が絞られますからここまで来たら、しらみつぶしてもタカがしれています。

【解 1】

- (1) 条件 $a\geq b\geq c\geq d\geq e\geq f$ より

$$a+b+c+d+e+f\leq a+a+a+a+a+a$$

$$abcdef=a+b+c+d+e+f \text{ より}$$

$$abcdef\leq 6a$$

a は自然数なので、 $bcdef\leq 6$ が成立する。

- (2) $d\geq 2$ とすると、 $f\leq e\leq d\leq c\leq b$ であり

$$bcdef\geq 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1=8 \text{ となり、(1) の結果に反する。}$$

ゆえに、 $d=1$ であり、 $f\leq e\leq d(=1)$ も考えると $e=f=1$

つまり、 $d=e=f=1$ を得る。

このとき、(1) の結果から $bc\leq 6$

したがって、以後

$$\begin{cases} abc=a+b+c+3 \cdots \textcircled{1} \\ 1\leq c\leq b\leq a \cdots \textcircled{2} \\ bc\leq 6 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

を満たす (a, b, c) を求めればよい。

③ を満たす (b, c) は ② に注意すると

$$(b, c)=(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (2, 2), (5, 1), (6, 1), (3, 2)$$

① を利用して a を求めると

$(b, c)=(1, 1)$ のとき ① を満たす a は存在しない

$(b, c)=(2, 1)$ のとき ① を満たす a は $a=6$

$(b, c)=(3, 1)$ のとき ① を満たす a は $a=\frac{7}{2}$ (不適)

$(b, c)=(4, 1)$ のとき ① を満たす a は $a=\frac{8}{3}$ (不適)

$(b, c)=(2, 2)$ のとき ① を満たす a は $a=\frac{7}{3}$ (不適)

$(b, c)=(5, 1)$ のとき ① を満たす a は $a=\frac{9}{4}$ (不適)

$(b, c)=(6, 1)$ のとき ① を満たす a は $a=2$ (② を満たさない)

$(b, c)=(3, 2)$ のとき ① を満たす a は $a=\frac{8}{5}$ (不適)

以上から、求める a, b, c, d, e, f の値の組は

$$(a, b, c, d, e, f)=(6, 2, 1, 1, 1, 1) \cdots \text{答}$$

【戦略 2】(2) について

$$\begin{cases} abc = a + b + c + 3 \cdots ① \\ 1 \leq c \leq b \leq a \cdots ② \\ bc \leq 6 \cdots ③ \end{cases}$$

まで得られたのであれば、 $c=1$ または 2 だと分かります。

c が大きくなると、② から b はそれ以上なので、③ を満たさなくなってしまうからです。

【解 2】(2) の部分的別解

$$\begin{cases} abc = a + b + c + 3 \cdots ① \\ 1 \leq c \leq b \leq a \cdots ② \\ bc \leq 6 \cdots ③ \end{cases}$$

を得る部分までは同じ

$c \geq 3$ とすると、② より、 $3 \leq b$ なので

$bc \geq 3 \cdot 3 (=9)$ となり、③ を満たさない。

ゆえに、 $c=1$ または 2

(i) $c=1$ のとき

① より $ab = a + b + 4$

これを变形すると $(a-1)(b-1)=5$

「積の形から約数を拾う」
という常套手段です。

② より、 $a-1 \geq b-1 \geq 0$ に注意すると $\begin{cases} a-1=5 \\ b-1=1 \end{cases}$

すなわち $(a, b)=(6, 2)$

(ii) $c=2$ のとき

① より $2ab = a + b + 5$

$$ab - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{5}{2}$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(b - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4}$$

$$(2a-1)(2b-1)=11$$

② より、 $2 \leq b \leq a$ であり、 $2a-1 \geq 2b-1 \geq 3$ に注意すると $(2a-1)(2b-1)=11$ を満たすことはない。

(i), (ii) より ①, ②, ③ を満たす自然数 a, b, c は

$$(a, b, c)=(6, 2, 1)$$

以上から、求める a, b, c, d, e, f の値の組は

$$(a, b, c, d, e, f)=(6, 2, 1, 1, 1, 1) \cdots \square$$

【総括】

典型問題をベースとしつつ、「その場力」も必要な問題で、例題で解法を確認した後の実戦問題として非常に適度な問題だと思います。