k，ℓ，m，n は自然数とする。条件

$$k\cdot\ell\cdot m\cdot n=k+\ell+m+n,\quad k\leqq\ell\leqq m\leqq n$$

を満たす組$(k,\ \ell,\ m,\ n)$をすべて求めよ。

＜ '12 東京理科大 ＞

【戦略】

一般的には和よりも積の方が大きいです。

にもかかわらず，和と積が等しいということは，今回登場する自然数はそこまで大きい数ではありません。

整数問題の３大手法

①：積の形から約数を拾う
②：余りで分類
③：範囲を絞る

のうち，③ の「範囲を絞る」という態度でいきます。

$k\leqq\ell\leqq m\leqq n$ **という条件から**

$$k+\ell+m+n\leqq n+n+n+n$$

とし，$k\cdot\ell\cdot m\cdot n=k+\ell+m+n$ **であることも加味すると**

$$k\cdot\ell\cdot m\cdot n\leqq 4n$$

となり，$k\cdot\ell\cdot m\leqq 4$ **ということで自然数** $k\cdot\ell\cdot m$ **の範囲が絞られ**

$$k\cdot\ell\cdot m=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

となります。

ここからは個別検証で各々のケースを潰していけばよいでしょう。

【解答】

条件 $k\leqq\ell\leqq m\leqq n$ より

$$k+\ell+m+n\leqq n+n+n+n$$

すなわち，$k+\ell+m+n\leqq 4n$ …①

条件 $k\cdot\ell\cdot m\cdot n=k+\ell+m+n$ と ① から

$$k\cdot\ell\cdot m\cdot n\leqq 4n$$

n は自然数より，$k\cdot l\cdot m\leqq 4$

したがって，$k\cdot\ell\cdot m=1,\ 2,\ 3,\ 4$ のいずれかに限られる。

(i)　$k\cdot\ell\cdot m=1$ のとき

k，ℓ，m は自然数なので，$(k,\ \ell,\ m)=(1,\ 1,\ 1)$

このとき，$1\cdot1\cdot1\cdot n=1+1+1+n$

すなわち $n=3+n$ となり，これを満たす n は存在しない。

(ii)　$k\cdot\ell\cdot m=2$ のとき

k，ℓ，m は $k\leqq\ell\leqq m$ を満たす自然数なので，$(k,\ \ell,\ m)=(1,\ 1,\ 2)$

このとき，$1\cdot1\cdot2\cdot n=1+1+2+n$， すなわち $2n=4+n$

よって $n=4$（$k\leqq\ell\leqq m\leqq n$ を満たす）

(iii)　$k\cdot\ell\cdot m=3$ のとき

k，ℓ，m は $k\leqq\ell\leqq m$ を満たす自然数なので，$(k,\ \ell,\ m)=(1,\ 1,\ 3)$

このとき，$1\cdot1\cdot3\cdot n=1+1+3+n$，すなわち $3n=5+n$

これより，$n=\dfrac{5}{2}$ を得るが，n が自然数という条件に反する。

(iv)　$k\cdot\ell\cdot m=4$ のとき

k，ℓ，m は $k\leqq\ell\leqq m$ を満たす自然数なので，

$$(k,\ \ell,\ m)=(1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 2,\ 2)$$

(iv−1)　$(k,\ \ell,\ m)=(1,\ 1,\ 4)$ のとき

$1\cdot1\cdot4\cdot n=1+1+4+n$，すなわち $4n=6+n$ で $n=2$

これは $k\leqq\ell\leqq m\leqq n$ を満たさない。

(iv−2)　$(k,\ \ell,\ m)=(1,\ 2,\ 2)$ のとき

$1\cdot2\cdot2\cdot n=1+2+2+n$，すなわち $4n=5+n$ で $n=\dfrac{5}{3}$ を得るが

n が自然数という条件に反する。

以上 (i)〜(iv) より，求める組$(k,\ \ell,\ m,\ n)$は

$$(k,\ \ell,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)\ \cdots 答$$

【総括】

典型問題の範疇です。

$k+\ell+m+n \leqq n+n+n+n$ として考える部分は初見だとテクッているように見えるかもしれませんが，この分野の常套手段です。

なお，$k \leqq \ell \leqq m \leqq n$ という条件がなく，単に

> k，ℓ，m，n は自然数とする。条件
> $$k \cdot \ell \cdot m \cdot n = k+\ell+m+n$$
> を満たす組 $(k,\ \ell,\ m,\ n)$ をすべて求めよ。

であっても，一旦 $k \leqq \ell \leqq m \leqq n$ という大小関係を導入し

$$(k,\ \ell,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)$$

を Get します。

この大小関係は勝手に自分が導入したものなので，実際にはこれらを並べ替えた

$$(k,\ \ell,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 1,\ 4,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1,\ 4),\ \cdots$$

という $\dfrac{4!}{2!}=12$【通り】が答えとなります。

対称性があるから並べ替えが許されるわけです。

そういった意味で，本問は大小関係の導入を条件で与えている点でよく言えば親切，悪く言えば余計なお世話です。