n を正の整数とする。数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+1$$

を満たしている。$b_n=a_n+1$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。また，一般項 a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

(3) $P_n=\dfrac{a_n b_n}{2}$ とし，P_n の正の約数の総和を T_n とおく。
a_n が素数であるとき，T_n-P_n を n の式で表せ。

【戦略】

(1) **置き換えの指示があり，手なりに計算を進めていけば問題ないはずです。**

(2) **等比数列の和の処理ができれば問題ありません。**

(3) $a_n=2^n-1$，$b_n=2^n$ **と出ていれば，** $P_n=2^{n-1}a_n$ **となります。**

a_n **が素数のとき，それは奇素数なので，** P_n **の正の約数は**

$$(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})(1+a_n)$$

を展開したときの各項に漏れなく重複なく現れます。

そして，この式を計算した結果がまさしく正の約数の総和ということに他なりません。

【解答】

(1)
$$\begin{aligned} b_{n+1}&=a_{n+1}+1\\ &=(2a_n+1)+1\\ &=2(a_n+1)\\ &=2b_n \quad \cdots 答 \end{aligned}$$

これより，数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=a_1+1=2$，公比 2 の等比数列であるから，$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

よって，$a_n+1=2^n$ を得て，$a_n=2^n-1$ $\cdots$答

(2)
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k&=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)\\ &=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1\\ &=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n\\ &=2^{n+1}-n-2 \quad \cdots 答 \end{aligned}$$

(3) $P_n=\dfrac{(2^n-1)\cdot 2^n}{2}=2^{n-1}\cdot(2^n-1)=2^{n-1}a_n$

a_n が素数であるとき，$a_n\ (=2^n-1)$ は奇素数であるから
P_n の正の約数の総和 T_n は

$$\begin{aligned} T_n&=(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})(1+a_n)\\ &=\frac{2^n-1}{2-1}\cdot 2^n\\ &=2^n(2^n-1) \end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} T_n-P_n&=2^n(2^n-1)-2^{n-1}(2^n-1)\\ &=2^{n-1}(2^n-1) \quad \cdots 答 \end{aligned}$$

【総括】

N 以外の正の約数の総和が N と等しい

とき，N は完全数と呼ばれます。

例えば，28 は完全数です。

28 の自分以外の正の約数は 1，2，4，7，14 です。

これを足すと，$1+2+4+7+14=28$ となります。

N 以外の正の約数の総和が N と等しいということは

$$(N\text{ の正の約数の総和})-N=N\,(\text{自分自身})$$

ということです。

最後の (3) の結果から，$T_n-P_n=P_n$ が成り立っているため，P_n は完全数です。

これはメルセンヌ素数が見つかれば，完全数が作れるということを意味します。