$\triangle$ABC において，$\angle$BAC$=90^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3}$ とする。
$\triangle$ABC の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$$

を満たすとする。

(1) $\angle$APB，$\angle$APC を求めよ。

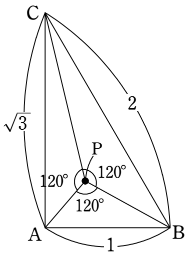
(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ。

＜ ’13 東京大 ＞

【戦略】

(1) **例題と同様のため割愛します。**

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=b$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=c$ **とおきます。**



3 つの未知数 a，b，c を求めるためには条件式も 3 つ必要です。

目につくのは (1) で導出した 120° という角度を活かす余弦定理でしょうか。

$$\begin{cases} a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ=1^2 \\ b^2+c^2-2bc\cos 120^\circ=2^2 \\ c^2+a^2-2ca\cos 120^\circ=(\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

すなわち $\begin{cases} a^2+b^2+ab=1 & \cdots(\text{ア}) \\ b^2+c^2+bc=4 & \cdots(\text{イ}) \\ c^2+a^2+ca=3 & \cdots(\text{ウ}) \end{cases}$ **を得ます。**

この連立方程式をどう捌くのかで差が付くでしょう。

ひとまずは (ア)$-$(イ) **から**

$$a^2-c^2+ab-bc=-3$$
$$(a+c)(a-c)+b(a-c)=-3$$
$$(a-c)(a+b+c)=-3$$

と因数分解できます。

(ア)$-$(イ) **が因数分解できることから** (イ)$-$(ウ) **も因数分解できるはずで，同様に計算すると**

$$(b-a)(a+b+c)=1$$

を得ます。

よって，$\dfrac{(a-c)(a+b+c)}{(b-a)(a+b+c)}=\dfrac{-3}{1}$ **から** $\dfrac{a-c}{b-a}=-3$，**すなわち**

$c=-2a+3b$ **を得て，c を消去できます。**

1 文字消えてくれれば，あとは手なりに進むはずです。

【解答】

(1) $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}=\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}$，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}=\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}$，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}$ とおく。

条件より，$\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}+\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}+\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}=\vec{0}$ … ①

また，$|\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}|=|\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}|=|\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}|=1$ … ②

さて，① より，$|\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}+\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}|^2=|\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}|^2$

② に注意すると，$1^2+2\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}\cdot\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}+1^2=1^2$

これより $\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}\cdot\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}=-\dfrac{1}{2}$ で，$\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}$，$\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}$ のなす角を θ_1 とすると

$|\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}|\cdot|\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}|\cdot\cos\theta_1=-\dfrac{1}{2}$ で，② より $\cos\theta_1=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに，$\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}$，$\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}$ のなす角は 120° であり，$\angle$APB$=120^\circ$

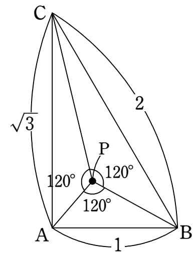
同様に，①，② のもつ式の対称性から

$\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}$，$\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}$ のなす角も 120°

であり，$\angle$APC$=120^\circ$

以上から，$\angle$APB$=120^\circ$，$\angle$APC$=120^\circ$ …答

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=b$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=c$ とおく。



$\triangle$PAB，$\triangle$PBC，$\triangle$PCA で余弦定理を用いると

$$\begin{cases} a^2+b^2+ab=1 & \cdots(\text{ア}) \\ b^2+c^2+bc=4 & \cdots(\text{イ}) \\ c^2+a^2+ca=3 & \cdots(\text{ウ}) \end{cases}$$

(ア)$-$(イ) より

$$a^2-c^2+ab-bc=-3$$
$$(a+c)(a-c)+b(a-c)=-3$$
$$(a-c)(a+b+c)=-3 \quad \cdots(\text{エ})$$

同様に (イ)$-$(ウ) より $(b-a)(a+b+c)=1$ …(オ)

(エ)，(オ) より，$\dfrac{(a-c)(a+b+c)}{(b-a)(a+b+c)}=\dfrac{-3}{1}$，すなわち $\dfrac{a-c}{b-a}=-3$

これを整理すると，$c=-2a+3b$ を得る。

(エ) より，$\{a-(-2a+3b)\}\{a+b+(-2a+3b)\}=-3$
であり，

$$(a-b)(-a+4b)=-1$$

これを整理すると $a^2-5ab+4b^2=1$ …(カ)

(ア)−(カ) より，a^2 を消去すると

$$6ab-3b^2=0$$
$$3b(2a-b)=0$$

$b\neq 0$ より，$b=2a$ を得る。

このとき，$c=-2a+3b=-2a+6a=4a$

(ア) から，$a^2+(2a)^2+a\cdot 2a=1$ で，$7a^2=1$

$a>0$ より $a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ を得て，$b=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$c=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$

以上から，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ …答

【戦略 2】(2) の連立方程式について　方針のみ

$$\begin{cases} a^2+ab+b^2=1 & \cdots(ア) \\ b^2+c^2+bc=4 & \cdots(イ) \\ c^2+a^2+ca=3 & \cdots(ウ) \end{cases}$$

ですが，$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ という因数分解をインスピレーションできれば，(ア) の両辺に $a-b$ をかけることで

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

となり，他も同じ要領で

$$\begin{cases} a^3-b^3=a-b \\ b^3-c^3=4(b-c) \\ c^3-a^3=3(c-a) \end{cases}$$

を得ます。

辺々加えれば $0=-2a+3b-c$，すなわち $c=-2a+3b$ と文字消去まで辿り着けます。

ここからは【解 1】に準じます。

ただし，$a^2+ab+b^2=1$ と $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a-b$ は同値ではありません。($a\neq b$ なら同値なのですが)

今回得られる $a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，$b=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$c=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ がきちんと (ア)，(イ)，(ウ) を満たしているかどうかをチェックする

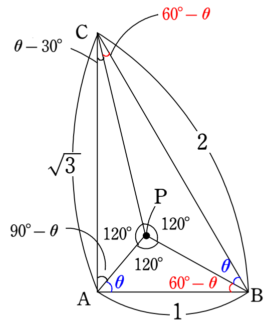
あるいは，$a=b$ と仮定すると (イ)，(ウ) より $\begin{cases} a^2+c^2+ac=4 \\ a^2+c^2+ac=3 \end{cases}$ となり矛盾します。

よって，$a\neq b$ で同様に $b\neq c$，$c\neq a$ も言えるため，(ア)，(イ)，(ウ) から

$\begin{cases} a^3-b^3=a-b \\ b^3-c^3=4(b-c) \\ c^3-a^3=3(c-a) \end{cases}$ **への式変形は同値であるという言及は必要でしょう。**

【戦略 3】

角度の状況を $\angle\mathrm{PAB}=\theta$ とおいて書き込んでいくと



のような状況になります。

ここで，$\triangle\mathrm{PAB}\backsim\triangle\mathrm{PBC}$ であることに気が付くと

$$a:b:1=b:c:2$$

すなわち $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{2}{1}$ を得ますから，

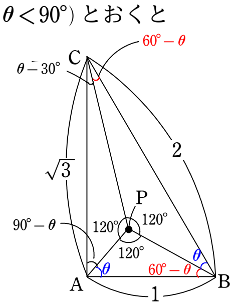
$$b=2a,\ c=2b\ (=4a)$$

と速攻で文字消去できてしまいます。

【解 3】

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=b$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=c$ とおく。

$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ $(0°<\theta<90°)$ とおくと



という状態となり，$\triangle\mathrm{PAB}\backsim\triangle\mathrm{PBC}$（∵ 内角がすべて等しい）であるため

$$a:b:1=b:c:2$$

よって，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{2}{1}$ であり，$b=2a$ …(*)，$c=2b\ (=4a)$ …(**)

$\triangle\mathrm{PAB}$ で余弦定理を用いると

$$a^2+b^2-2ab\cos 120°=1^2$$

$$a^2+b^2+ab=1$$

(*)，(**) を代入すると $a^2+(2a)^2+a\cdot(2a)=1$

ゆえに，$7a^2=1$ で，$a>0$ より $a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ を得る。

(*)，(**) より，$b=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$c=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$

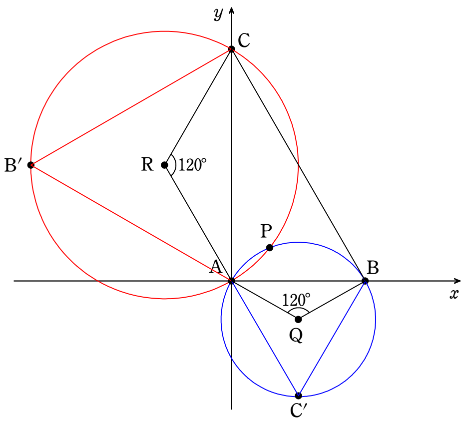
よって，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ …答

【戦略 4】(2) について

フェルマー点の作り方について経験や見識があれば，外側に正三角形を作り ,その外接円をとらえるということもできます。

ただし，経験に依存する方針であることは否めません。

【解 4】(2) について



(図 1)

A (0，0)，B (1，0)，C (0，$\sqrt{3}$) とする。

(図 1) のように，正三角形 ABC′，AB′C を作るように B′，C′ をとる。

△ABC′ の外接円を C_1，△AB′C の外接円を C_2 とする。

このとき，C_1，C_2 の A 以外の交点が P である。

$$C_1 : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

これを整理すると，$x^2+y^2-x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y=0$ …①

$$C_2 : \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1^2$$

これを整理すると，$x^2+y^2+x-\sqrt{3}y=0$ …②

①，② を連立して，①−② を計算すると

$-2x+\dfrac{4}{\sqrt{3}}y=0$，すなわち $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ を得る。

これを ① に代入し，$x^2+\dfrac{3}{4}x^2-x+\dfrac{1}{2}x=0$ で，$x(7x-2)=0$ を得る。

$x=0$ は A の x 座標を与えるので，P の x 座標は $x=\dfrac{2}{7}$

このとき，y 座標は $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{7}$ であるため，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{7},\ \dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)$

ゆえに，$\begin{cases} \mathrm{PA}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{7}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{7} \\ \mathrm{PB}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{7}-1\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7} \\ \mathrm{PC}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{7}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{7}-1\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{7}}{7} \end{cases}$ … 答

【総括】

本問の P は三角形 ABC のフェルマー点です。

余弦定理は目に付きやすいと思いますから，連立方程式の処理に帰着すると思います。

その際いかにスムーズに文字消去をするかが出来不出来に直結するでしょう。

試験場補正もかかりやすく，頭に血が昇った状態であった場合，一旦他の問題に避難するぐらいの冷静さは取り戻したいですね。