フェルマー点

(1)　$\vec{0}$ でない平面ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\vec{0}$$

を満たすとき，3つのベクトルの互いになす角をそれぞれ求めよ。

(2)　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{x}$ を任意の平面ベクトルとするとき

$$|\vec{a}-\vec{x}|\geqq|\vec{a}|-\vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

であることを示せ。ここで，$\vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ は，$\vec{x}$ と $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ の内積を表す。

(3)　すべての内角が 120° 未満の三角形 ABC の内部の点 X から各頂点までの距離の和 $|\overrightarrow{\mathrm{XA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{XB}}|+|\overrightarrow{\mathrm{XC}}|$ が最小になるような X を求めよ。

＜ ’00 東北大 ＞

【戦略】

(1)　**$\vec{a}$ と $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ は大きさが違うだけで，方向自体は同じなので**

単位ベクトル $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$，$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$ のなす角を考えればよいでしょう。

ひとまず $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}$，$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}$，$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}$ などとおいて

$\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}+\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}+\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}=\vec{0}$ と目に優しくしておきます。

ベクトルの情報から角度を得るには当然内積を経由するわけで

$$|\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}+\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}|^2=|\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}|^2$$

などと移項して 2 乗を計算することで内積を登場させるのが常套手段です。

(2)　**結局は $|\vec{a}-\vec{x}|^2\geqq\left|\,|\vec{a}|-\vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\,\right|^2$ が言えればよいでしょう。**

証明自体は素直に差を取って計算すれば問題ありません。

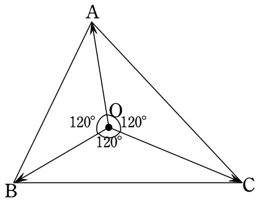
(3)　**(1)，(2) の結果をうまいこと利用することを考えます。**

(1) が場所のヒント，(2) が最小となることの裏付け用

と考えれば，

右の図となるような点 O が考えられます。

この O が今回求める X ということを予想し，それを裏付けます。



任意の点 X に対して

$|\overrightarrow{\mathrm{XA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{XB}}|+|\overrightarrow{\mathrm{XC}}|\geqq|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ であることを示しにいけばよく，これを位置ベクトルで読み替えると，(2) の活用法が見えてくるでしょう。

【解答】

(1)　$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}$，$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}$，$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}$ とおく。

条件より，$\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}+\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}+\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}=\vec{0}$ … ①

また，$|\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}|=|\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}|=|\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}|=1$ … ②

さて，① より，$|\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}+\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}|^2=|\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}|^2$

② に注意すると，$1^2+2\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}\cdot\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}+1^2=1^2$

これより $\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}\cdot\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}=-\frac{1}{2}$ で，$\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}$，$\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}$ のなす角を θ_1 とすると

$|\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}|\cdot|\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}|\cdot\cos\theta_1=-\frac{1}{2}$ で，② より $\cos\theta_1=-\frac{1}{2}$

ゆえに，$\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}$，$\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}$ のなす角は 120° であり，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角も 120°

同様に，①，② のもつ式の対称性から

$\overrightarrow{e_{\mathrm{B}}}$，$\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}$ のなす角，$\overrightarrow{e_{\mathrm{C}}}$，$\overrightarrow{e_{\mathrm{A}}}$ のなす角も 120°

であり，$\vec{b}$，$\vec{c}$ のなす角，$\vec{c}$，$\vec{a}$ のなす角も 120°

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の互いになす角は 120° …答

(2)

$$\begin{aligned}
&|\vec{a}-\vec{x}|^2-\left|\,|\vec{a}|-\vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\,\right|^2\\
&=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2-|\vec{a}|^2+2|\vec{a}|\left(\vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)-\left(\vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)^2\\
&=-2\vec{a}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{x}-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}{|\vec{a}|^2}\\
&=\frac{|\vec{a}|^2|\vec{x}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}{|\vec{a}|^2}\\
&=\frac{|\vec{a}|^2|\vec{x}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{x}|^2\cos^2\theta}{|\vec{a}|^2}\quad(\vec{a},\ \vec{x}\ \text{のなす角を}\ \theta\ \text{とおいた})\\
&=\frac{|\vec{a}|^2|\vec{x}|^2(1-\cos^2\theta)}{|\vec{a}|^2}\\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

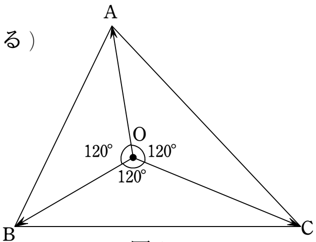
よって $|\vec{a}-\vec{x}|^2\geqq\left|\,|\vec{a}|-\vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\,\right|^2$

ゆえに，$|\vec{a}-\vec{x}|\geqq\left|\,|\vec{a}|-\vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\,\right|\geqq|\vec{a}|-\vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ が成立する。

以上から $|\vec{a}-\vec{x}|\geqq|\vec{a}|-\vec{x}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ が成り立つことが示された。

（等号成立は $\theta=0$，π，すなわち $\vec{a}$ と $\vec{x}$ が平行なとき）

(3)　(図 1) のように点 O をとる。
(この O がとれることは後に証明する)



(図 1)

このとき (1) を考えると

$$\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}+\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}+\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}=\vec{0} \cdots ③$$

この O を位置ベクトルの基準として

$$\mathrm{A}(\vec{a}),\ \mathrm{B}(\vec{b}),\ \mathrm{C}(\vec{c}),\ \mathrm{X}(\vec{x})$$

とすると，(2) より任意の点 X に対して

$$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OX}| \geqq |\overrightarrow{OA}|-\overrightarrow{OX}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$$ ，すなわち

$$|\overrightarrow{XA}| \geqq |\overrightarrow{OA}|-\overrightarrow{OX}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} \cdots ④$$

同様に

$$|\overrightarrow{XB}| \geqq |\overrightarrow{OB}|-\overrightarrow{OX}\cdot\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} \cdots ⑤$$

$$|\overrightarrow{XC}| \geqq |\overrightarrow{OC}|-\overrightarrow{OX}\cdot\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} \cdots ⑥$$

④＋⑤＋⑥ より

$$|\overrightarrow{XA}|+|\overrightarrow{XB}|+|\overrightarrow{XC}| \geqq |\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{OC}|-\overrightarrow{OX}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}+\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}+\frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}\right)$$

③ より $|\overrightarrow{XA}|+|\overrightarrow{XB}|+|\overrightarrow{XC}| \geqq |\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{OC}|$

等号成立は $\vec{a} /\!/ \vec{x}$，$\vec{b} /\!/ \vec{x}$，$\vec{c} /\!/ \vec{x}$ すなわち

$$\overrightarrow{OA} /\!/ \overrightarrow{OX},\ \overrightarrow{OB} /\!/ \overrightarrow{OX},\ \overrightarrow{OC} /\!/ \overrightarrow{OX}$$

のとき。

このとき，X と O は一致する。

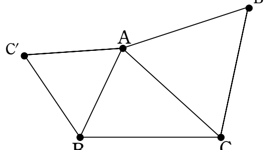
つまり，X は

$$\angle\mathrm{AXB}=\angle\mathrm{BXC}=\angle\mathrm{CXA}=120^\circ$$

を満たすようにとればよい。… 答

【 (図 1) のように O がとれることの証明】

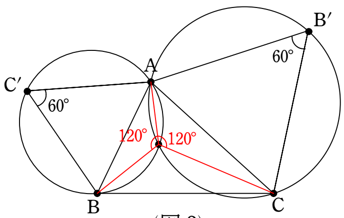
(図 2) のように
正三角形 AB′C，ABC′ を
考える。



(図 2)

この正三角形 AB′C，ABC′ の
外接円の交点は △ABC の内部にある。
(△ABC の内角はすべて 120° 未満 なので)

正三角形 AB′C，ABC′ の
外接円の交点を O とすれば
∠AOB＝∠BOC＝∠COA＝120°
となる。((図 3) 参照)



(図 3)

【総括】

本問で得られる X は三角形 ABC のフェルマー点と言います。

3 頂点からの距離の和が最小となるという重要な結果を含むテーマであり，経験があったり，結論を知っていると今回の誘導の使い方も見えやすいものがあったかと思います。

なお，120° 以上の鈍角を含む三角形 ABC については，その鈍角を見込む頂点がフェルマー点となります。