AとBの2人が次のようなゲームを行う。

n を自然数とし，Aはそれぞれ $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ と書かれた $(n+1)$ 枚の札をもっている。

Bはそれぞれ $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ と書かれた n 枚の札をもっているとする。

第1回目にBがAの持札から1枚の札をとり，もし番号が一致する札があればその2枚の札をその場に捨てる。番号が一致しない札はそのまま持ち続ける。次にBに持ち札があればAがBの持札から1枚の札をとり，Bと同じことをする。こうして先に札のなくなったほうを勝ちとする。Aが勝つ確率を p_n，Bが勝つ確率を q_n とする。

ただし相手の札をとるとき，どの札も等しい確率でとるものとする。

(1) $p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2$ を求めよ。

(2) $p_n+q_n=1$，$(n+2)p_n-np_{n-2}=1$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ であることを示せ。

(3) p_n を求めよ。

＜ '95 京都大 ＞

【戦略】

いわゆる「ババ抜き」です。

2人でやるババ抜きは基本的に

「ババ(今回で言う0)以外を取れば，確実に手が進む」

ということが言えます。

つまり，$1,\ 2,\ \cdots,\ n$ という数字そのものにあまり意味はなく，

「0かそれ以外の数字」

というぐらいの意味合いしかもちません。

そこで，例えば初期条件である

$$\begin{cases}\text{A が 0 と 0 以外の } n \text{ 枚の札をもっている}\\ \text{B が 0 以外の } n \text{ 枚の札をもっている}\end{cases}$$

という状況を $(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(0\ \&\ n$ 枚, n 枚$)$ などと表すことにします。

(1) は実験的な設問ですが，ひたすら書き出すということに終始せず，
(2) の漸化式作成に繋がるような要領を掴みたいところです。

気を付けたいのは，Aが勝つ確率，Bが勝つ確率ということに
執着しすぎないようにしたいところです。

人に関わらず，敢えて，A，Bと呼ばず，ババ をもっている人をX，ババをもっていない人をYとします。

$(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})=(0\ \&\ n$ 枚，n 枚$)$ (手番Y)

という状態で $\begin{cases}\text{ババをもっている人が勝つ確率が } p_n\\ \text{ババをもっていない人が勝つ確率が } q_n\end{cases}$

ということです。

この部分に注意すると，(1) と同じ要領で (2) の漸化式を作成できます。

(3) は (2) の漸化式の処理ですが，添え字の範囲(定義域)がうるさいので
番号を上げて，$(n+4)p_{n+2}-(n+2)p_n=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ として
$X_n=(n+2)p_n$ とおくことで，$X_{n+2}-X_n=1$ という1つ飛ばしの等差数列として処理します。

【解答】

このゲームにおいて，0以外のカードをとれば必ず場に捨てられる。

$$\begin{cases}\text{A が 0 と 0 以外の } n \text{ 枚の札をもっている}\\ \text{B が 0 以外の } n \text{ 枚の札をもっている}\end{cases}$$

という状況を $(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(0\ \&\ n$ 枚, n 枚$)$ などと表す。

(1) ＜p_1 について＞

初期状態は $(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(0\ \&\ 1$ 枚，1枚$)$ (手番B)

Bが1の札を取ると，Bの勝ちが決まってしまう。

ゆえに，Bは0の札を取る。

このとき，$(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(1$ 枚，$0\ \&\ 1$ 枚$)$ (手番A)

この状態からAが勝つ確率は q_1 (A，B の立場が変わっている)

ゆえに，$p_1=\dfrac{1}{2}q_1$ …①

＜q_1 について＞

初期状態は $(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(0\ \&\ 1$ 枚，1枚$)$ (手番B)

Bが1の札を取れば，その時点でBの勝ちが決まる。

Bが0の札を取れば $(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(1$ 枚，$0\ \&\ 1$ 枚$)$ (手番A)

この状態からBが勝つ確率は p_1

ゆえに，$q_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}p_1$ …②

①，② より，$p_1=\dfrac{1}{3}$，$q_1=\dfrac{2}{3}$ …答

＜p_2 について＞

初期状態は $(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(0\ \&\ 2$ 枚，2枚$)$ (手番B)

Bが0以外の札をとると，$(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(0\ \&\ 1$ 枚，1枚$)$ (手番A)
で，次にBの持札がなくなるため，Bの勝ちが確定してしまう。

ゆえに，1回目はBが0の札を取る。

このとき，$(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(2$ 枚，$0\ \&\ 2$ 枚$)$ (手番A)

この状態からAが勝つ確率は q_2

ゆえに，$p_2=\dfrac{1}{3}q_2$ …③

＜ q_2 について＞

初期状態は (A，B)＝(0 & 2 枚，2 枚) (手番 B)

B が 0 以外の札を取るとき，(A，B)＝(0 & 1 枚，1 枚) (手番 A) となり，次に B の持札がなくなるため，B の勝ちが確定する。

B が 0 の札を取るとき

このとき，(A，B)＝(2 枚，0 & 2 枚) (手番 A)

この状態から B が勝つ確率は p_2

ゆえに，$q_2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}p_2$ …④

③，④ より，$p_2=\dfrac{1}{4}$，$q_2=\dfrac{3}{4}$ …答

(2) ＜ p_n について＞

初期状態は (A，B)＝(0 & n 枚，n 枚) (手番 B)

B が 0 を取ると (A，B)＝(n 枚，0 & n 枚) (手番 A)

この状態から A が勝つ確率は q_n

B が 0 以外を取ると，(A，B)＝(0 & $n-1$ 枚，$n-1$ 枚) (手番 A)

このとき，次に A が 0 を取ることはないため，自動的に

$$(\text{A},\ \text{B})=(\,0\ \&\ n-2\text{ 枚},\ n-2\text{ 枚}\,)\ (\text{ 手番 B })$$

となる。

この状態から A が勝つ確率は p_{n-2}

以上から，$p_n=\dfrac{1}{n+1}q_n+\dfrac{n}{n+1}p_{n-2}$ …⑤

＜ q_n について＞

初期状態は (A，B)＝(0 & n 枚，n 枚) (手番 B)

B が 0 を取ると (A，B)＝(n 枚，0 & n 枚) (手番 A)

この状態から B が勝つ確率は p_n

B が 0 以外を取ると，(A，B)＝(0 & $n-1$ 枚，$n-1$ 枚) (手番 A)

このとき，次に A が 0 を取ることはないため，自動的に

$$(\text{A},\ \text{B})=(\,0\ \&\ n-2\text{ 枚},\ n-2\text{ 枚}\,)\ (\text{ 手番 B })$$

となる。

この状態から B が勝つ確率は q_{n-2}

以上から，$q_n=\dfrac{1}{n+1}p_n+\dfrac{n}{n+1}q_{n-2}$ …⑥

⑤＋⑥ より $p_n+q_n=\dfrac{1}{n+1}(p_n+q_n)+\dfrac{n}{n+1}(p_{n-2}+q_{n-2})$

これを整理すると，$p_n+q_n=p_{n-2}+q_{n-2}$

よって，$p_n+q_n=p_{n-2}+q_{n-2}=\cdots=\begin{cases} p_1+q_1 & (\ n \text{ が奇数のとき }) \\ p_2+q_2 & (\ n \text{ が偶数のとき }) \end{cases}$

(1) より $p_1+q_1=1$，$p_2+q_2=1$ であるため，n の偶奇に関わらず $p_n+q_n=1$ が成り立つことが示された。

また，$q_n=1-p_n$ を ⑤ に代入すると

$$p_n=\frac{1}{n+1}(1-p_n)+\frac{n}{n+1}p_{n-2}$$

これを整理すると $(n+2)p_n-np_{n-2}=1$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ が成立することが示された。

(3) $(n+2)p_n-np_{n-2}=1$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ という関係式は

$$(n+4)p_{n+2}-(n+2)p_n=1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

という関係式と同じことである。

$X_n=(n+2)p_n$ とおくと，$X_{n+2}-X_n=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

これより，X_1，X_3，X_5，…，X_{2m-1}，… は公差 1 の等差数列。

$m=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

$$\begin{aligned} X_{2m-1}&=X_1+(m-1) \\ &=3p_1+m-1 \\ &=3\cdot\frac{1}{3}+m-1 \\ &=m \end{aligned}$$

$n=2m-1$ とすれば，$X_n=\dfrac{n+1}{2}$

ゆえに，$(n+2)p_n=\dfrac{n+1}{2}$ で，$p_n=\dfrac{n+1}{2(n+2)}$

一方，X_2，X_4，X_6，…，X_{2m}，… も公差 1 の等差数列。

$m=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

$$\begin{aligned} X_{2m}&=X_2+(m-1) \\ &=4p_2+(m-1) \\ &=4\cdot\frac{1}{4}+m-1 \\ &=m \end{aligned}$$

$n=2m$ とすれば，$X_n=\dfrac{n}{2}$

ゆえに，$(n+2)p_n=\dfrac{n}{2}$ で，$p_n=\dfrac{n}{2(n+2)}$

以上から，$p_n=\begin{cases} \dfrac{n+1}{2(n+2)} & (\ n \text{ が奇数のとき}) \\ \dfrac{n}{2(n+2)} & (\ n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$ …答

【総括】

「何回目に勝つ」のような回数に拘ってしまうと身動きがとりづらくなります。

また，2 人でのババ抜きはババ以外をとれば手が進むので，n の偶奇によって結論を与える式が変わってくるというのはある意味で想定内なのですが，

最後の 1 枚を相手が引いてくれて勝ちが決まる

というわば「他力本願」的な勝ちのパターンもあり，そこまで単純にはいかず，漸化式の力を借りないと中々ツライものがあると思います。

(2) の $p_n+q_n=1$ というのはある意味当たり前に見えるかもしれませんが，今回，回数は指定されておらず，例えば，お互いひたすらババを取り続けるという可能性があるわけです。

ある意味では，「どちらも勝たない」確率が 0 であることを示せと言われていると考えるべきで，式的なバックボーンを添えて証明する必要があると考えた方がよいでしょう。

なお，本問の結論は

$$p_n=\frac{n+\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}}{2(n+2)}=\frac{2n+1+(-1)^{n-1}}{4(n+2)}$$

と一つの式でまとめることができます。

これによれば，

$$p_n=\frac{2n+1+(-1)^{n-1}}{4(n+2)}<\frac{2(n+2)}{4(n+2)}=\frac{1}{2}$$

ですから，

最初にババをもってしまうと不利

ということが言え，確かにそうだなと言える結論です。