ベクトル

$$\overrightarrow{x_1}=(0,1,1),\ \overrightarrow{x_2}=(1,0,1),\ \overrightarrow{x_3}=(1,1,0)$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{b_1}=\dfrac{\overrightarrow{x_1}}{|\overrightarrow{x_1}|}$ とおくとき，$|\overrightarrow{x_2}-s\overrightarrow{b_1}|$ を最小にする実数 s の値と

そのときのベクトル $\overrightarrow{y_2}=\overrightarrow{x_2}-s\overrightarrow{b_1}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{b_2}=\dfrac{\overrightarrow{y_2}}{|\overrightarrow{y_2}|}$ とおくとき，$|\overrightarrow{x_3}-t\overrightarrow{b_1}-u\overrightarrow{b_2}|$ を最小にする実数 t，u の値と

そのときのベクトル $\overrightarrow{y_3}=\overrightarrow{x_3}-t\overrightarrow{b_1}-u\overrightarrow{b_2}$ を求めよ。

(3) $\overrightarrow{b_3}=\dfrac{\overrightarrow{y_3}}{|\overrightarrow{y_3}|}$ とおくとき，$\overrightarrow{b_1}$，$\overrightarrow{b_2}$，$\overrightarrow{b_3}$ は互いに直交することを示せ。

＜ '11 名古屋市立大 ＞

【戦略】

(1) (2) **$\overrightarrow{x_2}-s\overrightarrow{b_1}$ や $\overrightarrow{x_3}-t\overrightarrow{b_1}-u\overrightarrow{b_2}$ を成分で表現できますから**

$|\overrightarrow{x_2}-s\overrightarrow{b_1}|$，$|\overrightarrow{x_3}-t\overrightarrow{b_1}-u\overrightarrow{b_2}|$ を立式できます。

そうなると基本的な 2 次関数の最小問題ということになります。

(3) **もちろん目指すべきは $\overrightarrow{b_1}\cdot\overrightarrow{b_2}=0$，$\overrightarrow{b_2}\cdot\overrightarrow{b_3}=0$，$\overrightarrow{b_3}\cdot\overrightarrow{b_1}=0$ です。**

これら $\overrightarrow{b_1}$，$\overrightarrow{b_2}$，$\overrightarrow{b_3}$ は成分表示できます。

計算をまとめると，

$$\overrightarrow{b_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{b_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{b_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

となります。

直接 $\overrightarrow{b_1}\cdot\overrightarrow{b_2}$，$\overrightarrow{b_2}\cdot\overrightarrow{b_3}$，$\overrightarrow{b_3}\cdot\overrightarrow{b_1}$ を計算するのではなく，

$$\overrightarrow{p_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{p_2}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{p_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

とおきなおして $\overrightarrow{p_1}$，$\overrightarrow{p_2}$，$\overrightarrow{p_3}$ が互いに直交することを示すぐらいの工夫はしたいところです。

【解答】

(1) $\overrightarrow{b_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ であり，

$$\overrightarrow{x_2}-s\overrightarrow{b_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{s}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{s}{\sqrt{2}}\\1-\frac{s}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdots①$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{x_2}-s\overrightarrow{b_1}|^2&=1^2+\left(-\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1-\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2\\&=s^2-\sqrt{2}s+2\\&=\left(s-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{x_2}-s\overrightarrow{b_1}|$ が最小となる s は $s=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …答

このとき，① より，$\overrightarrow{y_2}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ …答

(2) $\overrightarrow{b_2}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{x_3}-t\overrightarrow{b_1}-u\overrightarrow{b_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{t}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{u}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{2u}{\sqrt{6}}\\1-\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{u}{\sqrt{6}}\\-\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{u}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\cdots②$$

$$|\overrightarrow{x_3}-t\overrightarrow{b_1}-u\overrightarrow{b_2}|^2=\left(1-\frac{2u}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{u}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{u}{\sqrt{6}}\right)^2$$

これを整理すると

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{x_3}-t\overrightarrow{b_1}-u\overrightarrow{b_2}|^2&=t^2-\sqrt{2}t+u^2-\frac{2}{\sqrt{6}}u+2\\&=\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(u-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{x_3}-t\overrightarrow{b_1}-u\overrightarrow{b_2}|$ が最小となる t，u は

$$t=\frac{\sqrt{2}}{2},\ u=\frac{1}{\sqrt{6}}\ \cdots答$$

このとき，② より，$\overrightarrow{y_3}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ …答

(3) $\overrightarrow{y}_3=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ であり，$|\overrightarrow{y}_3|=\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

よって，$\overrightarrow{b}_3=\dfrac{\overrightarrow{y}_3}{|\overrightarrow{y}_3|}=\dfrac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\cdot\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

一方，$\overrightarrow{b}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{b}_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{p}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{p}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ とおいたとき，

$\overrightarrow{p}_1$，$\overrightarrow{p}_2$，$\overrightarrow{p}_3$ が互いに直交することを示せばよい。

$$\overrightarrow{p}_1\cdot\overrightarrow{p}_2=0\cdot2+1\cdot(-1)+1\cdot1=0$$

$$\overrightarrow{p}_2\cdot\overrightarrow{p}_3=2\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot(-1)=0$$

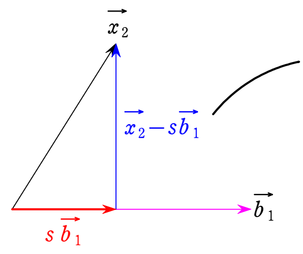
$$\overrightarrow{p}_3\cdot\overrightarrow{p}_1=1\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot1=0$$

よって，$\overrightarrow{p}_1$，$\overrightarrow{p}_2$，$\overrightarrow{p}_3$ は互いに直交することが示されたので，
題意は示された。

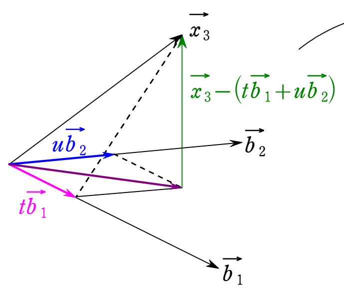
【総括】

例題は正射影ベクトルを内積を用いて表現する手法でした。

今回の類題は正射影ベクトルを数式的に最大最小問題を通じて Get するという手法ということで，根っこはグラム・シュミットの直交化法の問題です。



直交するときに $|\overrightarrow{x}_2-s\overrightarrow{b}_1|$ は最小となり，それを $\overrightarrow{y}_2$ としています。



直交するときに $|\overrightarrow{x}_3-t\overrightarrow{b}_1-u\overrightarrow{b}_2|$ は最小となり，それを $\overrightarrow{y}_3$ としています。

なお，本問の設定は

$$\overrightarrow{b}_2=\frac{\overrightarrow{y}_2}{|\overrightarrow{y}_2|},\quad \overrightarrow{b}_3=\frac{\overrightarrow{y}_3}{|\overrightarrow{y}_3|}$$

というように自分自身の大きさで割ることで大きさを 1 にしています。

これを正規化といい，本問のような内容を「正規直交化」といいます。