どのような自然数 n も，3 で割り切れない自然数 k と 0 以上の整数 a を用いて，$n=3^a k$ と 1 通りにかける。

このとき，$f(n)=a$ と定める。たとえば，$f(1)=0$，$f(2)=0$，$f(3)=1$ である。以下のことを証明せよ。

(1) 自然数 m，n に対して，$f(mn)=f(m)+f(n)$ が成り立つ。

(2) 2 以上の自然数 n に対して，$f(n^3-n)\geqq 1$ が成り立つ。

＜ '01 岐阜大 ＞

【戦略】

(1) **例題と同じ要領で**

$m=3^a k$（a は 0 以上の整数，k は 3 で割り切れない自然数）
$n=3^b \ell$（b は 0 以上の整数，ℓ は 3 で割り切れない自然数）

と表して考えていきます。

(2) n^3-n **がもつ素因数 3 の個数が 1 以上であることを示すわけですから** n^3-n **が 3 の倍数であることを示せばよいことになります。**

そしてそれは $n^3-n=n(n-1)(n+1)$ **と因数分解できることから，連続 3 整数の積と見ることができ，**$3!$（$=6$）**の倍数と言えます。**

【解答】

(1) $m=3^a k$（a は 0 以上の整数，k は 3 で割り切れない自然数）
$n=3^b \ell$（b は 0 以上の整数，ℓ は 3 で割り切れない自然数）

と表す。（このとき，$f(m)=a$，$f(n)=b$）

$mn=3^{a+b}\cdot k\ell$

k，ℓ は 3 で割り切れないため，$k\ell$ も 3 で割り切れず

$$f(mn)=a+b$$

が成立する。

よって，$f(mn)=f(m)+f(n)$ が成り立つ。

(2) $n^3-n=n(n-1)(n+1)$

$n\geqq 2$ のとき，n^3-n は連続 3 整数の積で表せるため，6 の倍数。

つまり，$n^3-n=3^N M$（M は 3 で割り切れない自然数）と表したとき，$N\geqq 1$ となる。

ゆえに，$f(n^3-n)\geqq 1$ が成り立つ。

【総括】

結局 $f(n)$ という記号のもつ意味を読み取り，何をすべきか紐解けば，定番の話題でした。

ちなみに n から始まる k 個の連続自然数の積は

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)\cdots\cdots\{n+(k-1)\} &= {}_{n+k-1}\mathrm{P}_k \\ &= k!\cdot {}_{n+k-1}\mathrm{C}_k \\ &= k!\cdot(\text{整数}) \end{aligned}$$

と表せます。

連続 k 整数の積は $k!$ の倍数であることは常識にしておきましょう。