正の整数 $n=2^a b$ (ただし , a は 0 以上の整数で b は奇数) に対して , $f(n)=a$ とおくとき , 次の問いに答えよ。

(1) 正の整数 k , m に対して $f(km)=f(k)+f(m)$ であることを示せ。

(2) $f(3^n+1)$ $(n=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ を求めよ。

(3) $f(3^n-1)-f(n)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を求めよ。

< '07 横浜国立大 >

【戦略】

(1) **n の素因数 2 の個数を $f(n)$ と表すということです。**

k の素因数 2 の個数と ℓ の素因数 2 の個数を加えれば $k\ell$ の素因数 2 の個数となることは直感的に当然で , それを数式として表現します。

$$k=2^a b \ (a \text{ は 0 以上の整数}, b \text{ は正の奇数})$$
$$\ell=2^c d \ (c \text{ は 0 以上の整数}, d \text{ は正の奇数})$$

などとおいて話を進めればよいでしょう。

(2) **ひとまず目に優しく , $a_n=3^n+1$ とおきます。**

実験してみると
$a_0=1$, $a_1=4=2^2$, $a_2=10=2\cdot5$, $a_3=28=2^2\cdot7$, $a_4=82=2\cdot41$
となるため ,

$$f(a_n)=f(3^n+1)=\begin{cases}1 & (n=0, 2, 4, \cdots\cdots) \\ 2 & (n=1, 3, 5, \cdots\cdots)\end{cases}$$ **と予想できます。**

これを裏付けようと思うと , 帰納法が有力でしょう。

(3) **$f(n)$ を考えるにあたり , $n=2^p q$ (p は 0 以上の整数 , q は正の奇数) とおいて考えます。**

次に興味があるのは 3^n-1 の素因数 2 の個数です。

$$3^n-1=(3-1)(3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots\cdots+3+1)$$

なので , n が奇数 ($p=0$) だと

$$\begin{aligned}3^n-1&=2\cdot\{\overbrace{(\text{奇数})+(\text{奇数})+\cdots\cdots+(\text{奇数})+1}^{\text{奇数個}}\}\\&=2\cdot(\text{奇数})\end{aligned}$$

となり , $f(3^n-1)=1$ ということになります。

n が偶数 $(p\geqq1)$ のとき

$f\left(3^{2^p q}-1\right)$ **について考えていきますが, 目がチカチカしますので置き換えを駆使しながら $b_p=f\left(3^{2^p q}-1\right)$ とおきます。**

(1) , (2) の結果を用いながら実験すると , $b_1=3$, $b_2=4$, $b_3=5$, $\cdots$ となり , 等差数列であることが予想されますから , b_{p+1} を計算して $b_{p+1}=b_p+1$ であることを目指せばよいでしょう。

【解答】

(1) $k=2^a b$ (a は 0 以上の整数 , b は正の奇数)
$\ell=2^c d$ (c は 0 以上の整数 , d は正の奇数)

とすると , $f(k)=a$, $f(\ell)=c$

このとき , $k\ell=2^{a+c}\cdot bd$ で , bd は奇数なので , $f(k\ell)=a+c$

ゆえに , $f(k\ell)=f(k)+f(\ell)$ が成立する。

(2) $a_n=3^n+1$ とする。

$a_0=1$, $a_1=4=2^2$, $a_2=10=2\cdot5$, $a_3=28=2^2\cdot7$, $a_4=82=2\cdot41$

$$f(a_n)=f(3^n+1)=\begin{cases}1 & (n=0, 2, 4, \cdots\cdots) \\ 2 & (n=1, 3, 5, \cdots\cdots)\end{cases}$$ と予想できる。

(i) 上記実験より $f(a_0)=1$, $f(a_1)=2$ が成立する。

(ii) $k=0, 1, 2, \cdots$ に対して
$$f(a_{2k})=1, f(a_{2k+1})=2$$
と仮定する。

$3^{2k}+1=2M$, $3^{2k+1}+1=4N$ (M , N は奇数) と表せる。

このとき

$$\begin{aligned}3^{2k+2}+1&=9\cdot3^{2k}+1\\&=9(2M-1)+1\\&=18M-8\\&=2(9M-4)\\&=2\cdot(\text{奇数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3^{2k+3}+1&=9\cdot3^{2k+1}+1\\&=9(4N-1)+1\\&=36N-8\\&=4(9N-2)\\&=2^2\cdot(\text{奇数})\end{aligned}$$

ゆえに , $f(a_{2k+2})=1$, $f(a_{2k+3})=2$ が成立する。

(i) , (ii) より , $f(3^n+1)=\begin{cases}1 & (n=0, 2, 4, \cdots\cdots) \\ 2 & (n=1, 3, 5, \cdots\cdots)\end{cases}$ $\cdots$ 答

(3) $n=2^p q$ (p は0以上の整数，q は正の奇数）と表す。

このとき，$3^n-1=(3-1)(3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots\cdots+3+1)$

（Ⅰ）$p=0$ のとき n は奇数であり，$3^n-1=2\cdot$(奇数)

$f(3^n-1)=1$，$f(n)=0$ であるため，$f(3^n-1)-f(n)=1$

（Ⅱ）$p\geqq 1$ のとき

$f(3^n-1)$，すなわち $f\left(3^{2^p q}-1\right)$ について

$b_p=f\left(3^{2^p q}-1\right)$ とおくと

$b_{p+1}=f\left(3^{2^{p+1} q}-1\right)$

$=f\left(\left(3^{2^p q}+1\right)\left(3^{2^p q}-1\right)\right)$

$=f\left(3^{2^p q}+1\right)+f\left(3^{2^p q}-1\right)$ （∵ (1) より）

$=1+b_p$ （∵ (2) より）

今，$b_1=f(3^{2q}-1)$

$=f\left((3^q+1)(3^q-1)\right)$

$=f(3^q+1)+f(3^q-1)$ （∵ (1) より）

$=2+1$ （∵ (2)，（Ⅰ））

$=3$

ゆえに，$b_p=3+(p-1)$，すなわち $b_p-p=2$

よって，$f\left(3^{2^p q}-1\right)-f(2^p q)=2$，すなわち $f(3^n-1)-f(n)=2$

（Ⅰ），（Ⅱ）より，$f(3^n-1)-f(n)=\begin{cases}1 & (n\text{ が奇数のとき})\\ 2 & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$ …答

【総括】

素因数の個数について考える問題は，基本的なものから本格的なものまで幅広く問われます。

なお，自然数 n がもつ素因数 p の個数 a を

$$a=\mathrm{ord}_p n$$

という記号を用いて表すこともあり，n の p に関するオーダーといいます。

ある意味指数部分を考える記号である log に近い性質をもち

$$\mathrm{ord}_p(k\ell)=\mathrm{ord}_p k+\mathrm{ord}_p \ell$$

が言えます。