次の式

$$x_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\,d\theta\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

によって定義される数列 $\{x_n\}$ について，次の問に答えよ。

(1) 漸化式 $x_n=\dfrac{n-1}{n}x_{n-2}$ $(n=2,3,4,\cdots)$ を示せ。

(2) $x_n\cdot x_{n-1}$ の値を求めよ。

(3) 不等式 $x_n>x_{n+1}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n{x_n}^2$ を求めよ。

＜ '02 名古屋市立大 ＞

【戦略】

(**類題 1 と同じであるため割愛**)

【解答】

(1) $n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}x_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta\,(\sin\theta)'\,d\theta\\&=\Big[\cos^{n-1}\theta\,\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\cos^{n-2}\theta\,\sin^2\theta\,d\theta\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta\,(1-\cos^2\theta)\,d\theta\\&=(n-1)(x_{n-2}-x_n)\end{aligned}$$

これより，$nx_n=(n-1)x_{n-2}$ であり，

$$x_n=\frac{n-1}{n}x_{n-2}\ (n=2,3,4,\cdots)\text{ が成り立つ。}$$

(2) $y_n=nx_{n-1}x_n$ とおく。

(1) の等式を変形した $nx_n=(n-1)x_{n-2}$ の両辺に x_{n-1} をかけると

$nx_{n-1}x_n=(n-1)x_{n-2}x_{n-1}$，すなわち $y_n=y_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$

ゆえに，$n\geqq1$ に対して

$$y_n=y_{n-1}=y_{n-2}=\cdots\cdots=y_1(1\cdot x_0\cdot x_1)$$

ここで，$x_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$，$x_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

ゆえに，$y_n=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $nx_{n-1}x_n=\dfrac{\pi}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$ が成立し，

$$x_n\cdot x_{n-1}=\frac{\pi}{2n}\ \cdots\text{答}$$

(3) 積分区間 $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $0\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから

$$\sin^n\theta\geqq\sin^{n+1}\theta$$

等号は常には成立しないので $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\,d\theta$

よって，$x_n>x_{n+1}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ が成立する。

(4) (3) より，$nx_nx_{n+1}\leqq nx_nx_n\leqq nx_{n-1}x_n$

$$nx_nx_{n+1}=(n+1)x_nx_{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n}{n+1}y_{n+1}$$

ゆえに，$\dfrac{n}{n+1}y_{n+1}\leqq n{x_n}^2\leqq y_n$

(2) より，$\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{\pi}{2}\leqq n{x_n}^2\leqq\dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n{x_n}^2=\frac{\pi}{2}$ …答

【総括】

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$ において，$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおけば，

$dx=-dt$ ，

x	$0\ \to\ \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}\ \to\ 0$

ですから

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx&=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\quad(\because\ \text{積分変数は自由})\end{aligned}$$

です。

sin だろうが cos だろうが本質的に満たす漸化式や，それに派生する性質は同じということです。