自然数 n に対して，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ dx$ とおく。

(1)　定積分 I_1，I_2，I_3 を求めよ。

(2)　次の不等式を証明せよ。$I_n \geqq I_{n+1}$

(3)　次の漸化式が成り立つことを証明せよ。$I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$

(4)　次の極限値を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$

＜ ’10 大阪教育大 ＞

【戦略】

(1)　**基本的な定積分の計算問題です。**

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ dx$ **は問題ないでしょう。**

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\ dx$ **は「偶数乗は半角」という常套手段で倒します。**

$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\ dx$ **は「奇数乗は 1 乗分離」という常套手段です。**

(2)　**定積分の基本事項**

$a\leqq x\leqq b$ **において** $f(x)\geqq g(x)$ **ならば** $\int_a^b f(x)\,dx\geqq\int_a^b g(x)\,dx$

を活用します。

積分区間 $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ **において** $0\leqq \sin x\leqq 1$ **ですから，基本的に** $\sin x$ **はかければかけるほど小さくなります。**

したがって，$\sin^n x\geqq\sin^{n+1}x$ **ということになります。**

(3)　**積分漸化式の作成の常套手段は部分積分です。**

(4)　**(3) の漸化式は 2 つ飛ばしの漸化式ですから，偶奇で様子が分かれるという部分が目につくかもしれません。**

I_{2n}，I_{2n+1} **を直接計算すると**

$$\begin{aligned}I_{2n}&=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\,I_0\\&=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{2n+1}&=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\,I_1\\&=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\end{aligned}$$

となり，ここから，$\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$ **を計算すると，**

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n)^2(2n-2)^2\cdots 2^2}{(2n-1)^2(2n-3)^2\cdots 3^2}\cdot\frac{2}{\pi}$$

となります。（詳しい計算過程は後述します。）

ここで $n\to\infty$ としても「？？」となるでしょう。

ここで，直接の極限計算は一旦見切りをつけるべきです。

リカバリーとしては

隣接 2 項間の関係として (2) の不等式に目を付けます。

そうなってくると，直接計算によらない (ターゲットに直接触れない) 極限の導出方法として

「はさみうちの原理」

で仕留める方針が思いつくでしょう。

$I_{2n+2}\leqq I_{2n+1}\leqq I_{2n}$ **ですから，**$\dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}}\leqq\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\leqq 1$

と挟んで，最左辺で (3) を効かせていくと

$\dfrac{2n+1}{2n+2}\leqq\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\leqq 1$ **となり，はさみうち完成です。**

【解答】

(1)　$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ ⋯答

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos 2x}{2}\ dx=\dfrac{1}{2}\Big[x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$ ⋯答

$$\begin{aligned}I_3&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\ dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\ \sin x\ dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\sin x\ dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^2\sin x\ dx\\&=I_1-\Big[-\frac{1}{3}(\cos x)^3\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=1+\frac{1}{3}(0-1)\\&=\frac{2}{3}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

(2)　積分区間 $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $0\leqq\sin x\leqq 1$ であるから

$$\sin^n x\geqq\sin^{n+1}x$$

ゆえに，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ dx\geqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\ dx$

よって，$I_n\geqq I_{n+1}$ が成立する。

(3) $$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\ dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\ (-\cos x)'\,dx$$
$$=\Big[-\sin^{n+1}x\ \cos x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1)\sin^n x\ \cos^2 x\ dx$$
$$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ (1-\sin^2 x)\,dx$$
$$=(n+1)(I_n-I_{n+2})$$

ゆえに，$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$

すなわち $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$ が成立する。

(4) (2) より，$I_{2n+2}\leqq I_{2n+1}\leqq I_{2n}$

$I_1>0$ であり，(3) の漸化式から帰納的に $I_m>0$ $(m=1,2,\cdots)$ であることに注意して，辺々 I_{2n} (>0) で割ると

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}\leqq\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\leqq 1$$

ここで (3) より，$I_{2n+2}=\dfrac{2n+1}{2n+2}I_{2n}$ であるため

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}=\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}\longrightarrow 1\ (n\to\infty)$$

ゆえに，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1$ …答

【総括】

ウォリスの公式を背景にもつ古典的な内容であり，多くの大学で出題されているため，割と手垢の付いた話題です。

ちなみにウォリスの公式とは次のようなものです。

$$\boxed{\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}}$$

Π というのは「総積」を表す記号で，$\sum$ の掛け算 Ver と思ってください。

具体的に書き下すと

$$\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\times\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\times\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\times\frac{8\cdot8}{7\cdot9}\times\cdots\cdots=\frac{\pi}{2}$$

というものです。

ここで【戦略】で行き詰まった $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$ の直接計算の路線について少し触れておきます。

(3) の漸化式から

$I_{2n}=\dfrac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4}=\cdots$ と順次番号を下げていくと

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0$$
$$=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

を得ます。

同様に，
$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}I_{2n-3}=\cdots$$
と考えていくと

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}I_1$$
$$=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}$$

となります。

これより
$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=\frac{\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-4}{2n-5}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1}\right)\times\frac{2}{\pi}$$

最後の $\dfrac{2}{\pi}$ はいったんおいておきます。

分母には奇数が集まっていますが，$\begin{cases}2n+1\text{ と }1\text{ が }1\text{ 個}\\3\sim 2n-1\text{ が }2\text{ 個ずつ}\end{cases}$ あり

分子には $2\sim 2n$ までの偶数が 2 個ずつ集まっています。

したがって，

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\times\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\times\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\times\cdots\cdots\times\frac{(2n-2)(2n-2)}{(2n-3)(2n-1)}\times\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}\times\frac{2}{\pi}$$

ということになり，(4) の結果から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1$ でしたから

$$\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\times\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\times\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\times\frac{8\cdot8}{7\cdot9}\times\cdots\cdots=\frac{\pi}{2}$$

という無限積を得ることになり，これはウォリスの公式が主張する結果です。

なお，ウォリスの公式と呼ばれるものにはもう一つ

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n\,!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}=\sqrt{\pi}}$$

という形のものもあります。

これについては【類題】で扱います。