2人の人が1つのさいころを1回ずつ振り，大きい目を出したほうを勝ちとすることにした。ただし，このさいころは k の目の出る確率は p_k である。（$k=1，2，3，4，5，6$）

このとき，引き分けになる確率を P とする。次の問いに答えよ。

(1) P を求めよ。

(2) $P \geqq \dfrac{1}{6}$ であることを示せ。

また，$P=\dfrac{1}{6}$ ならば $p_k=\dfrac{1}{6}$ $(k=1，2，3，4，5，6)$ であることを示せ。

＜ '79 京都大 ＞

【戦略】

(1) **P は同じ目が出る確率であるため，**

$$P=p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2$$

です。

(2) **確かに言えることとしては，どれかの目は出るはずなので**

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$$

ということは言えるはずです。

$P=p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2$ **なので**

$$p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2 \geqq \frac{1}{6}$$

を示したいわけです。

1乗和が手元にある状態で，2乗和を評価する方法として

コーシーシュワルツの不等式

がピンとくればしめたものです。

$$(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)(p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2) \geqq (p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)^2$$

が得られ，解決です。

【解1】

(1) 2人の目が同じになる確率が P であり，

$$P=p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2 \cdots \text{答}$$

(2) コーシー・シュワルツの不等式から

$$(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)(p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2) \geqq (1\cdot p_1+1\cdot p_2+1\cdot p_3+1\cdot p_4+1\cdot p_5+1\cdot p_6)^2$$

ゆえに，$6P \geqq 1^2$（$\because$ $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$）

これより，$P \geqq \dfrac{1}{6}$

また，等号成立は

$$\frac{p_1}{1}=\frac{p_2}{1}=\frac{p_3}{1}=\frac{p_4}{1}=\frac{p_5}{1}=\frac{p_6}{1}$$

すなわち

$$p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6\left(=\frac{1}{6}\right)$$

のときである。

つまり，$P=\dfrac{1}{6}$ ならば，$p_k=\dfrac{1}{6}$ $(k=1，2，3，4，5，6)$ である。

【戦略 2】⑵ について

例題のように $\dfrac{1}{6}$ とのズレを考える補正的な置き換えをすることで解くことももちろん可能です。

【解 2】⑵ について

⑵ $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ …①

$p_k-\dfrac{1}{6}=q_k$ とおくと，① より

$$\left(q_1+\frac{1}{6}\right)+\left(q_2+\frac{1}{6}\right)+\left(q_3+\frac{1}{6}\right)+\left(q_4+\frac{1}{6}\right)+\left(q_5+\frac{1}{6}\right)+\left(q_6+\frac{1}{6}\right)=1$$

すなわち $q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6=0$ …②

$$P={p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2+{p_4}^2+{p_5}^2+{p_6}^2$$

$$=\left(q_1+\frac{1}{6}\right)^2+\left(q_2+\frac{1}{6}\right)^2+\left(q_3+\frac{1}{6}\right)^2+\left(q_4+\frac{1}{6}\right)^2+\left(q_5+\frac{1}{6}\right)^2+\left(q_6+\frac{1}{6}\right)^2$$

$$={q_1}^2+{q_2}^2+{q_3}^2+{q_4}^2+{q_5}^2+{q_6}^2+\frac{1}{3}(q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6)+\frac{1}{6}$$

$$={q_1}^2+{q_2}^2+{q_3}^2+{q_4}^2+{q_5}^2+{q_6}^2+\frac{1}{6}$$ （∵ ②）…③

$$\geqq\frac{1}{6}$$

等号成立条件は $q_k=0$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$，すなわち

$$p_k=\frac{1}{6}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

ゆえに，$P\geqq\dfrac{1}{6}$ であり，等号が成立するための必要十分条件は

各目の出る確率がすべて $\dfrac{1}{6}$ となること。…答

【総括】

例題と並べてみると簡単に思えますが，実戦の現場で対応するには確かな力が必要でしょう。