いびつなサイコロがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\frac{1}{6}$ とは限らないとする。このサイコロを 2 回ふったとき同じ目が出る確率を P とし，1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする。

(1) $P \geqq \frac{1}{6}$ であることを示せ。また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ。

(2) $\frac{1}{4} \geqq Q \geqq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}P$ であることを示せ。

＜ '08 東京工業大 ＞

【戦略】

各目が出る確率が分かりませんから，k の目が出る確率を p_k と設定します。

確かに言えることとしては，どれかの目は出るはずなので

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$$

ということは言えるはずです。

(1) $P=p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2$ **なので**

$$p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2 \geqq \frac{1}{6}$$

を示したいわけです。

1 乗和が手元にある状態で，2 乗和を評価する方法として

コーシーシュワルツの不等式

がピンとくればしめたものです。

$$(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)(p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2) \geqq (p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)^2$$

が得られ，解決です。

(2) $Q=(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)$ **です。**

$(p_1+p_3+p_5)+(p_2+p_4+p_6)=1$ **と 2 つの和として見れると**

相加平均・相乗平均の関係

がピンときます。

一方で，Q と P を結び付けたいわけなので，再びコーシーシュワルツの不等式を用いて

$$\begin{cases}(1^2+1^2+1^2)(p_1{}^2+p_3{}^2+p_5{}^2) \geqq (p_1+p_3+p_5)^2 \\ (1^2+1^2+1^2)(p_2{}^2+p_4{}^2+p_6{}^2) \geqq (p_2+p_4+p_6)^2\end{cases}$$

と見て辺々を加えると，手なりに P，Q についての不等式が得られます。

【解 1】

(1) $k=1, 2, \cdots, 6$ として，k の目が出る確率を p_k とする。

このとき，$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ …①

$$P=p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2$$

コーシーシュワルツの不等式から

$$(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)(p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2) \geqq (p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)^2$$

すなわち $6P \geqq 1$ となり，$P \geqq \frac{1}{6}$

等号成立条件は

$$1:1:1:1:1:1=p_1:p_2:p_3:p_4:p_5:p_6$$

すなわち，$p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=\frac{1}{6}$ のとき

ゆえに，$P \geqq \frac{1}{6}$ であり，等号が成立するための必要十分条件は

各目の出る確率がすべて $\frac{1}{6}$ となること。…答

(2) 1 回目に奇数が出る，かつ 2 回目に偶数が出る確率 Q は

$$Q=(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)$$

$p_1 \sim p_6$ は全て 0 以上の実数なので，相加平均・相乗平均の関係から

$$(p_1+p_3+p_5)+(p_2+p_4+p_6) \geqq 2\sqrt{(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)}$$

① に注意すると，$1 \geqq 2\sqrt{Q}$ で，$\sqrt{Q} \leqq \frac{1}{2}$ で，両辺正の数なので，

$$Q \leqq \frac{1}{4}$$

一方，コーシーシュワルツの不等式から

$$\begin{cases}(1^2+1^2+1^2)(p_1{}^2+p_3{}^2+p_5{}^2) \geqq (p_1+p_3+p_5)^2 \\ (1^2+1^2+1^2)(p_2{}^2+p_4{}^2+p_6{}^2) \geqq (p_2+p_4+p_6)^2\end{cases}$$，すなわち

$$\begin{cases}3(p_1{}^2+p_3{}^2+p_5{}^2) \geqq (p_1+p_3+p_5)^2 \\ 3(p_2{}^2+p_4{}^2+p_6{}^2) \geqq (p_2+p_4+p_6)^2\end{cases}$$

辺々加えると，

$$3(p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2) \geqq (p_1+p_3+p_5)^2+(p_2+p_4+p_6)^2$$

$$3P \geqq \{(p_1+p_3+p_5)+(p_2+p_4+p_6)\}^2-2(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)$$

① にも注意すると

$3P \geqq 1^2-2Q$，すなわち $Q \geqq \frac{1}{2}-\frac{3}{2}P$ を得る。

以上から，$\frac{1}{4} \geqq Q \geqq \frac{1}{2}-\frac{3}{2}P$ が成立する。

【戦略 2】

コーシーシュワルツの不等式が思いつかなかった場合，愚直に証明することも可能です。

いびつでなければ，もちろん各面の出る確率は $\frac{1}{6}$ です。

私自身が解いたとき，

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

という等式がいわば「揃っている (歪んでいない) 等式」であり，

サイコロが歪むと，この等式も歪む

というイメージをもちました。

そこで，

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$$

という式を

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$$

と見ました。

左辺は歪んだ世界，右辺は歪んでいない世界

です。

そうなると，

$$\left(p_1-\frac{1}{6}\right)+\left(p_2-\frac{1}{6}\right)+\left(p_3-\frac{1}{6}\right)+\left(p_4-\frac{1}{6}\right)+\left(p_5-\frac{1}{6}\right)+\left(p_6-\frac{1}{6}\right)=0$$

と見れるでしょう。

このあとは，目に優しく $q_k=p_k-\frac{1}{6}$ と見ることにより，

$$q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6=0$$

として考えます。

【解 2】

(1)　$k=1, 2, \cdots, 6$ として，k の目が出る確率を p_k とする。

このとき，$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ …①

$p_k-\frac{1}{6}=q_k$ とおくと，① より

解答だけ見ると天下り的に見えますが【戦略 2】を考えれば自然な置き換えでしょう。

$$\left(q_1+\frac{1}{6}\right)+\left(q_2+\frac{1}{6}\right)+\left(q_3+\frac{1}{6}\right)+\left(q_4+\frac{1}{6}\right)+\left(q_5+\frac{1}{6}\right)+\left(q_6+\frac{1}{6}\right)=1$$

すなわち $q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6=0$ …②

$$P=p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2$$

$$=\left(q_1+\frac{1}{6}\right)^2+\left(q_2+\frac{1}{6}\right)^2+\left(q_3+\frac{1}{6}\right)^2+\left(q_4+\frac{1}{6}\right)^2+\left(q_5+\frac{1}{6}\right)^2+\left(q_6+\frac{1}{6}\right)^2$$

$$=q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2+q_4{}^2+q_5{}^2+q_6{}^2+\frac{1}{3}(q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6)+\frac{1}{6}$$

$$=q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2+q_4{}^2+q_5{}^2+q_6{}^2+\frac{1}{6}\quad(\because ②)\ \cdots ③$$

$$\geqq\frac{1}{6}$$

等号成立条件は $q_k=0$ ($k=1, 2, \cdots, 6$)，すなわち

$$p_k=\frac{1}{6}\ (k=1, 2, \cdots, 6)$$

ゆえに，$P\geqq\frac{1}{6}$ であり，等号が成立するための必要十分条件は

各目の出る確率がすべて $\frac{1}{6}$ となること。… 答

(2)　$Q=(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)$

$$=\left(q_1+q_3+q_5+\frac{1}{2}\right)\left(q_2+q_4+q_6+\frac{1}{2}\right)$$

$$=(q_1+q_3+q_5)(q_2+q_4+q_6)+\frac{1}{2}(q_1+q_2+\cdots+q_6)+\frac{1}{4}$$

$$=(q_1+q_3+q_5)(q_2+q_4+q_6)+\frac{1}{4}\quad(\because ②)\ \cdots ④$$

② より，$q_2+q_4+q_6=-(q_1+q_3+q_5)$ なので

$$Q=-(q_1+q_3+q_5)^2+\frac{1}{4}\leqq\frac{1}{4}$$

一方，③，④ より

$$3P+2Q-1=3\left(q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2+q_4{}^2+q_5{}^2+q_6{}^2+\frac{1}{6}\right)+2\left\{(q_1+q_3+q_5)(q_2+q_4+q_6)+\frac{1}{4}\right\}-1$$

$$=3(q_1{}^2+q_2{}^2+\cdots+q_6{}^2)+2(q_1+q_3+q_5)(q_2+q_4+q_6)$$

$$=(q_1+q_2)^2+(q_1+q_4)^2+(q_1+q_6)^2+(q_3+q_2)^2+(q_3+q_4)^2+(q_3+q_6)^2+(q_5+q_2)^2+(q_5+q_4)^2+(q_5+q_6)^2$$

$$\geqq 0$$

以上から $\frac{1}{4}\geqq Q\geqq\frac{1}{2}-\frac{3}{2}P$ が成立する。

【総括】

いびつなサイコロという一風変わった設定によって面食らった人も多いと思います。

コーシーシュワルツの不等式が自分のものになっていれば

手元の条件式と，示すべき不等式の形

を観察することで【戦略 1】【解 1】の路線で倒せるでしょうが，指導者ならともかく，東工大合格者といえどもこの路線で解答した人は決して多くはないと思われます。

試験場で可能性のある路線は【戦略 2】【解 2】の路線でしょうが，それでも試験場補正などを考えると，スムーズにいくかどうかというのは別問題だと思います。

個別の確率はいびつで分からないけど

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$$

あるいは

$$q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6=0$$

という「全体の和が一定量」という性質が手持ちの武器であり，それを活かしたいという気持ちが差を生んだと思います。