(1)　α を実数とし，$\beta=\sin\alpha$，$\gamma=\sin\beta$ とおく。このとき

$$\frac{|\alpha|+|\gamma|}{2}\geqq|\beta|$$

を証明せよ。

(2)　$\pi<3.1416$ を用いて，$\sin\frac{1}{2}>0.4764$ を示せ。

＜ '08 群馬大 ＞

【戦略 1】

(1)　**示すべき不等式を $|\alpha|+|\gamma|-2|\beta|\geqq0$ と見ることにします。**

$|\alpha|+|\gamma|-2|\beta|$ を「小さくしよう，小さくしよう」という気持ちで評価することを考えると

ひとまず，$|\alpha|+|\gamma|-2|\beta|\geqq|\alpha|-2|\beta|$ です。

$|\beta|=|\sin\alpha|\leqq1$ であるため，$|\alpha|\geqq2$ であれば，$|\alpha|-2|\beta|\geqq0$ が言えることになります。

じゃあ「$|\alpha|<2$ のときは？」となるので，次はそのケースを潰していきます。

x，$\sin x$ が奇関数であることを見越して $\begin{cases}0\leqq\alpha<2 \text{ のとき}\\ -2<\alpha<0 \text{ のとき}\end{cases}$ と場合分けします。(実質は労力が半分になることは想定済みです。)

$0\leqq\alpha<2$ のときは $\beta=\sin\alpha\geqq0$ であり，$0\leqq\beta\,(=\sin\alpha)\leqq1$

よって，$\gamma=\sin\beta\geqq0$ となり，$|\alpha|$，$|\beta|$，$|\gamma|$ はそのまま絶対値が外れ

$$|\alpha|+|\gamma|-2|\beta|=\alpha+\gamma-2\beta$$

となります。

ここからどう見るかは若干の発想力が必要ですが

$\gamma=\sin\beta$，$\beta=\sin\alpha$ ですから，$\alpha+\gamma-2\beta=(\alpha-\sin\alpha)-(\beta-\sin\beta)$

と見たいところです。

こうなると，$f(x)=x-\sin x$ という関数を設定し，$f(\alpha)$，$f(\beta)$ の大小について調べたくなります。

ここから先は微分して手なりに進めていけるはずです。

$-2<\alpha<0$ のときは $\alpha=-\alpha'$ などとおくと，$0<\alpha'<2$ で上述の場合に帰着できます。

(2)　**$\sin\frac{1}{2}$ を登場させて (1) を利用することを考えると $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ なので**

(1) の不等式で $\alpha=\frac{\pi}{6}$ を代入する方針が目に付きます。

【解 1】

(1)　(i)　$|\alpha|\geqq2$，すなわち $\alpha\leqq-2$，$2\leqq\alpha$ のとき

$$\begin{aligned}|\alpha|+|\gamma|-2|\beta|&\geqq|\alpha|-2|\beta| \quad (\because\ |\gamma|\geqq0)\\ &\geqq0 \quad (\because\ |\alpha|\geqq2,\ |\beta|=|\sin\alpha|\leqq1)\end{aligned}$$

より，$\frac{|\alpha|+|\gamma|}{2}\geqq|\beta|$ が成立する。

(ii)　$0\leqq\alpha<2$ のとき

$0\leqq\alpha<2\,(<\pi)$ なので，$\beta=\sin\alpha$ について $0\leqq\beta\leqq1$

$$\begin{aligned}|\alpha|+|\gamma|-2|\beta|&=\alpha+\gamma-2\beta\\ &=(\alpha-\beta)-(\beta-\gamma)\\ &=(\alpha-\sin\alpha)-(\beta-\sin\beta)\end{aligned}$$

$f(x)=x-\sin x$ とおくと，$f'(x)=1-\cos x\geqq0$

$0\leqq\alpha<2$ において，$f(x)$ は単調増加であり，$f(0)\leqq f(\alpha)$

よって，$0\leqq\alpha-\sin\alpha$，すなわち $\alpha\geqq\sin\alpha\,(=\beta)$

ゆえに，$f(\alpha)\geqq f(\beta)$ で，$\alpha-\sin\alpha\geqq\beta-\sin\beta$

これより，$|\alpha|+|\gamma|-2|\beta|\geqq0$ で，$\frac{|\alpha|+|\gamma|}{2}\geqq|\beta|$ が成立する。

(iii)　$-2<\alpha<0$ のとき

$\alpha=-\alpha'$ とおくと $0<\alpha'<2$

(ii) より，$|\alpha'|+|\sin(\sin\alpha')|-2|\sin\alpha'|\geqq0$

$|-\alpha|+|\sin(\sin(-\alpha))|-2|\sin(-\alpha)|\geqq0$

$|\alpha|+|-\sin(\sin\alpha)|-2|-\sin\alpha|\geqq0$

$|\alpha|+|\sin(\sin\alpha)|-2|\sin\alpha|\geqq0$

$|\alpha|+|\gamma|-2|\beta|\geqq0$ で，$\frac{|\alpha|+|\gamma|}{2}\geqq|\beta|$ が成立する。

以上 (i)，(ii)，(iii) より $\frac{|\alpha|+|\gamma|}{2}\geqq|\beta|$ が成立する。

(2)　(1) より，$\frac{|\alpha|+|\sin(\sin\alpha)|}{2}\geqq|\sin\alpha|$ (等号成立は $\alpha=0$ のとき)

$\alpha=\frac{\pi}{6}$ とすると，$\frac{\left|\frac{\pi}{6}\right|+\left|\sin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\right|}{2}>\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|$

すなわち $\frac{\frac{\pi}{6}+\left|\sin\frac{1}{2}\right|}{2}>\frac{1}{2}$ で整理すると，$\left|\sin\frac{1}{2}\right|>1-\frac{\pi}{6}$

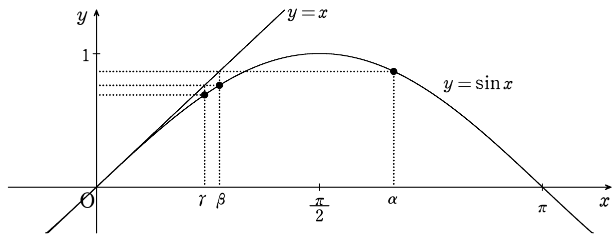
$0<\frac{1}{2}<\pi$ より，$\sin\frac{1}{2}>0$ だから，$\sin\frac{1}{2}>1-\frac{\pi}{6}$

これより，
$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{2} &> \frac{6-\pi}{6}\\ &> \frac{6-3.1416}{6}\\ &= \frac{2.8584}{6}\\ &= 0.4764\end{aligned}$$

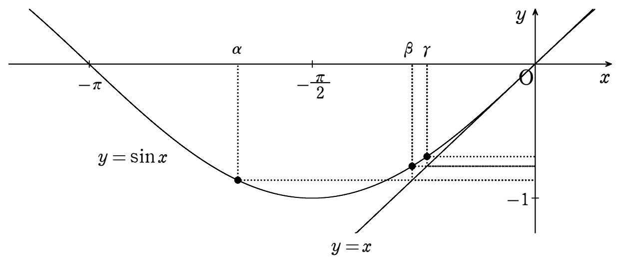
【戦略 2】(1) について

ある意味，α，β，γ は合成写像的に定まっていきますから，$y=x$ のグラフを沿えて視覚化してみることにします。

(Ⅰ)

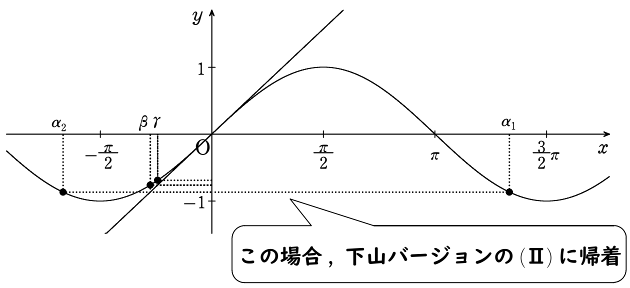


(Ⅱ)



といった感じですが，α の場所的にはその他の場合も十分考えられます。

ただ，例えば，下の図を見てみましょう。



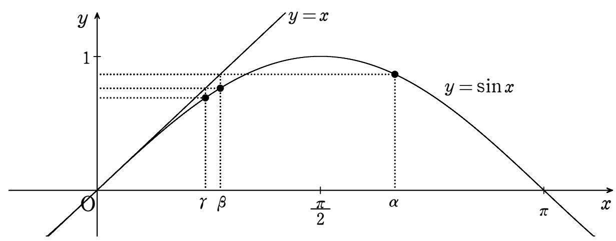
$|\alpha_1|>\pi$，$|\alpha_2|<\pi$ であるため，$\dfrac{|\alpha_1|+|\gamma|}{2} > \dfrac{|\alpha_2|+|\gamma|}{2}$ ですから
この場合 (Ⅱ) の場合を示せば十分ということになります。

つまり，(Ⅰ)，(Ⅱ) が証明されれば，$|\alpha|>\pi$ のときは示すべき不等式は甘くなります。

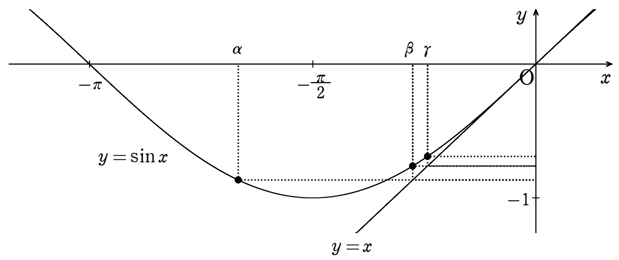
さらに，$y=x$，$y=\sin x$ が奇関数であることを考えると，(Ⅰ) の場合だけでも十分です。

【解 2】(1) について

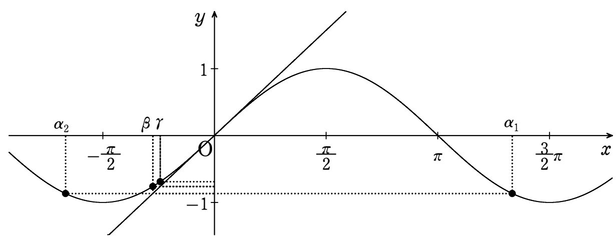
(Ⅰ)　$0 \leqq \alpha \leqq \pi$ のとき



(Ⅱ)　$-\pi \leqq \alpha < 0$ のとき



一方，$|\alpha_1|>\pi$，$|\alpha_2| \leqq \pi$ であるとき



$\dfrac{|\alpha_1|+|\gamma|}{2} > \dfrac{|\alpha_2|+|\gamma|}{2}$ なので，結局は (Ⅰ)，(Ⅱ) のいずれかで考えれば十分である。

したがって，$-\pi \leqq \alpha \leqq \pi$ の範囲で $\dfrac{|\alpha|+|\gamma|}{2} \geqq |\beta|$ を示せば十分ある。

さらに，$y=x$，$y=\sin x$ が奇関数であることを考えれば，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$ で考えれば十分である。

このとき，$0 \leqq \sin\alpha \leqq 1$，すなわち $0 \leqq \beta \leqq 1$

$0 \leqq \beta \leqq 1\ (<\pi)$ より，$0 \leqq \sin\beta \leqq 1$，すなわち $0 \leqq \gamma \leqq 1$

ゆえに，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$ の範囲で，$\dfrac{\alpha+\gamma}{2} \geqq \beta$ を示せばよい。

$$\begin{aligned}\alpha+\gamma-2\beta &= (\alpha-\beta)-(\beta-\gamma)\\ &= (\alpha-\sin\alpha)-(\beta-\sin\beta)\ \cdots ①\end{aligned}$$

$x \geqq 0$ において，$x \geqq \sin x$ であるため，$\begin{cases}\alpha \geqq \sin\alpha\\ \beta \geqq \sin\beta\end{cases}$

したがって，$0 \leqq \gamma \leqq \beta \leqq \alpha \leqq \pi$

$f(x)=x-\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ とすると，$f'(x)=1-\cos x \geqq 0$

ゆえに，$f(x)$ は単調増加で，$f(\beta) \leqq f(\alpha)$ なので，$f(\alpha)-f(\beta) \geqq 0\ \cdots ②$

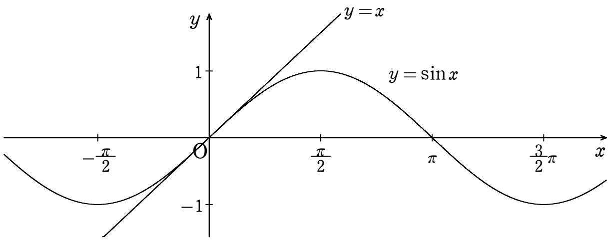
①，② より，$\alpha+\gamma-2\beta \geqq 0$，すなわち $\dfrac{\alpha+\gamma}{2} \geqq \beta$ が成立し，題意は示された。

【総括】

(1) が結構クセモノです。

(2) が示したければ，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ が代入できる範囲である $0<\alpha<\pi$ の範囲で証明させてくれればよいのですが，一般の範囲で証明させるということで結構ウルサイ問題になってます。

なお，【解 2】で用いた $x\geqq 0$ のときに $x\geqq\sin x$ という有名不等式は



というグラフを考えれば明らかです。

なお，炎上を覚悟してノーヒントで出題する大学は少ないでしょうが，ノーヒントの場合を考えてみます。

ノーヒントの場合，知識に頼りますが

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots$$

という $\sin x$ のテイラー展開 (マクローリン展開) をもとにした

$$\sin x\geqq x-\frac{x^3}{6}\ \ (x\geqq 0)$$

という不等式を利用します。(証明は差をとって微分してゴリゴリ進めるだけです。)

$x=\dfrac{1}{2}$ を代入すると，

$$\sin\frac{1}{2}\geqq\frac{1}{2}-\frac{1}{48}=\frac{23}{48}\ (\ =0.4791\cdots)$$

と示すことができます。

この不等式は第 2 項の $\dfrac{x^3}{3!}$ で止めましたが，止める位置が後ろにいき，次数が高くなるほど，不等式の精度は上がります。

（ただ，符号によって不等号の向きが変化することに注意してください。）