N を自然数とし，複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ は $z^N=1$ をみたすとして，以下の級数和 S_1，S_2，S_3 の値を求めよ。

ただし，ここで i は虚数単位 $(i^2=-1)$ である。

(1) $S_1=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{N-1}$

(2) $S_2=1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots\cdots+\cos(N-1)\theta$

(3) $S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots\cdots+\cos^2(N-1)\theta$

＜ '98 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) **因数分解を用いてもよいですが，どうせ場合分けすることを考えれば初項 1，公比 z の等比数列の和と見れば直接的に求まります。**

(2) $\cos$ **は極形式における実部を司ります。**

そういう目線でモノを見て

S_2 **が** $1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{N-1}$ **の実部である**

ということを看破したいところです。

(3) **次数を下げたいので，半角公式を用いる気持ちが芽生えるでしょうか。**

$$\begin{aligned}S_3&=\sum_{k=0}^{N-1}\cos^2 k\theta\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1+\cos2k\theta}{2}\quad(\because\ \text{半角の公式})\\&=\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\cos2k\theta\end{aligned}$$

ですから，あとは $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\cos2k\theta$ **の処理になります。**

$\cos$ **の 1 乗の** $\sum$ **については (2) の手法が使えそうです。**

ド・モアブルの定理から $z^{2k}=\cos2k\theta+i\sin2k\theta$ **なので**

$\cos2k\theta$ **は** z^{2k} **の実部である**

ことを看破し， $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}z^{2k}\left(=1+z^2+z^4+\cdots\cdots+z^{2(N-1)}\right)$ **に注目します。**

【解答】

(1) S_1 は初項 1，公比 z の等比数列の初項から第 N 項までの和である。

ゆえに，

$$S_1=\begin{cases}\overbrace{1+1+\cdots\cdots+1}^{N\text{個}}=N & (z=1\text{ のとき})\\ \dfrac{1-z^N}{1-z}=0 & (z\neq1\text{ のとき})\end{cases}\quad\cdots\text{答}$$

(2) ド・モアブルの定理より

$$z^k=\cos k\theta+i\sin k\theta\quad(k=0,1,2,\cdots\cdots,N-1)$$

$$\begin{aligned}1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{N-1}&=\sum_{k=0}^{N-1}z^k\\&=\sum_{k=0}^{N-1}(\cos k\theta+i\sin k\theta)\\&=\left(\sum_{k=0}^{N-1}\cos k\theta\right)+\left(\sum_{k=0}^{N-1}\sin k\theta\right)i\end{aligned}$$

S_2 は S_1 の実部である。

(1) の結果から S_1 は実数であるため， $S_2=\begin{cases}N & (z=1\text{ のとき})\\0 & (z\neq1\text{ のとき})\end{cases}\cdots$答

(3)

$$\begin{aligned}S_3&=\sum_{k=0}^{N-1}\cos^2 k\theta\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1+\cos2k\theta}{2}\quad(\because\ \text{半角の公式})\\&=\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\cos2k\theta\quad\cdots①\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}1+z^2+z^4+\cdots\cdots+z^{2(N-1)}&=\sum_{k=0}^{N-1}z^{2k}\\&=\sum_{k=0}^{N-1}(\cos2k\theta+i\sin2k\theta)\\&=\left(\sum_{k=0}^{N-1}\cos2k\theta\right)+\left(\sum_{k=0}^{N-1}\sin2k\theta\right)i\end{aligned}$$

より，$\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\cos2k\theta$ は $1+z^2+z^4+\cdots\cdots+z^{2(N-1)}$ の実部である。

$$1+z^2+z^4+\cdots\cdots+z^{2(N-1)}$$

$$=\begin{cases}1+1+\cdots\cdots+1 & (z^2=1\text{ のとき})\\ \dfrac{1-(z^2)^N}{1-z^2}=\dfrac{(1-z^N)(1+z^N)}{1-z^2} & (z^2\neq1\text{ のとき})\end{cases}$$

$$=\begin{cases}N & (z^2=1\text{ のとき})\\0 & (z^2\neq1\text{ のとき})\end{cases}$$

ゆえに，$\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\cos2k\theta=\begin{cases}N & (z^2=1\text{ のとき})\\0 & (z^2\neq1\text{ のとき})\end{cases}\cdots②$

①，② より

$$S_3=\begin{cases}N & (z=\pm1\text{ のとき})\\ \dfrac{N}{2} & (z\neq\pm1\text{ のとき})\end{cases}\cdots\text{答}$$

【総括】

ド・モアブルの定理を経由し，実部や虚部に注目することで

三角関数の $\sum$ 計算をする

というオチも難関大受験生であれば経験しておきたい話題です。