$\omega=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく。ただし，θ は実数で，i は虚数単位である。

(1)　$|1-\omega|=2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$ を示せ。

(2)　$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ のとき

(i)　ω，ω^2，ω^3，ω^4 は方程式 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ の解であることを示せ。

(ii)　$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)=5$ となることを示せ。

(3)　$I=\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}\sin\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{4\pi}{5}$ の値を求めよ。

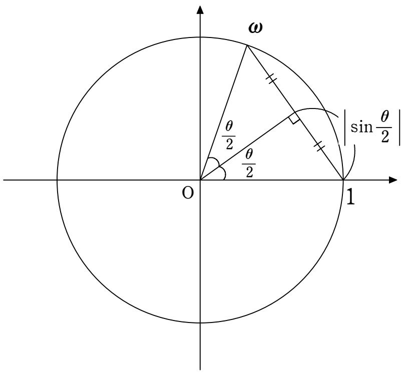
＜ ’05 宮城教育大 ＞

【戦略】

(1)　**$|1-\omega|$ は視覚的にとらえると複素数平面上の**

点 1 と点 ω の距離

ですから



のような状態となり，当然に思えるでしょうが，一般角 θ に対してだと幾何的なメリットは余り感じられませんから，式で処理します。

下手なことをせずとも，$1-\omega=(1-\cos\theta)-(\sin\theta)i$ で実部と虚部が分かりますから，その大きさ $|1-\omega|$ は

$$|1-\omega|=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}$$

として計算でき，ここからは手なりに進む (はず)。

(2) (i)　**$\omega^5=1$，$(\omega^2)^5=1$，$(\omega^3)^5=1$，$(\omega^4)^5=1$ が示されれば ω，ω^2，ω^3，ω^4 は $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ の解であることが言えますから，それを目指していきます。**

もちろん，これら高次計算の武器はド・モアブルの定理です。

(ii)　**(i) の結果から**

$$z^4+z^3+z^2+z+1=(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)$$

ということが言えます。

この式を見て，$z=1$ を代入したくならないわけがありません。

(3)　**(1) の右辺を $\sin\dfrac{\pi}{5}$，$\sin\dfrac{2\pi}{5}$，$\sin\dfrac{3\pi}{5}$，$\sin\dfrac{4\pi}{5}$ に見立てたいですね。**

そうなると，(1) の等式に $\theta=\dfrac{2\pi}{5}$，$\dfrac{4\pi}{5}$，$\dfrac{6\pi}{5}$，$\dfrac{8\pi}{5}$ を代入したくなると思います。

【解答】

(1)　$1-\omega=1-(\cos\theta+i\sin\theta)$
$=(1-\cos\theta)-i\sin\theta$

$$\begin{aligned}|1-\omega|&=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}\\&=\sqrt{2(1-\cos\theta)}\quad(\because\ \cos^2\theta+\sin^2\theta=1)\\&=\sqrt{2\cdot2\sin^2\frac{\theta}{2}}\quad(\because\ \text{半角の公式})\\&=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

となり，題意は示された。

(2) (i)　$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ であり，ド・モアブルの定理から

$$\omega^5=\cos2\pi+i\sin2\pi$$

よって，$\omega^5=1$

ここで，再びド・モアブルの定理から

$$\begin{cases}(\omega^2)^5=\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)^5=\cos4\pi+i\sin4\pi=1\\(\omega^3)^5=\left(\cos\dfrac{6\pi}{5}+i\sin\dfrac{6\pi}{5}\right)^5=\cos6\pi+i\sin6\pi=1\\(\omega^4)^5=\left(\cos\dfrac{8\pi}{5}+i\sin\dfrac{8\pi}{5}\right)^5=\cos8\pi+i\sin8\pi=1\end{cases}$$

したがって，ω，ω^2，ω^3，ω^4 は $z^5=1$，すなわち

$$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$$

の解である

ω，ω^2，ω^3，ω^4 は 1 ではないため，$z^4+z^3+z^2+z+1=0$ の解である。

(ii)　(i) より

$$z^4+z^3+z^2+z+1=(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)$$

が成立する。

これに $z=1$ を代入すると

$1^4+1^3+1^2+1+1=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)$，すなわち

$$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)=5$$

が成立する。

(3)　(1) において $\theta=\dfrac{2\pi}{5}$, $\dfrac{4\pi}{5}$, $\dfrac{6\pi}{5}$, $\dfrac{8\pi}{5}$ とすれば，それぞれ

$$\begin{cases} |1-\omega|=2\left|\sin\dfrac{\pi}{5}\right|=2\sin\dfrac{\pi}{5} \\ |1-\omega^2|=2\left|\sin\dfrac{2\pi}{5}\right|=2\sin\dfrac{2\pi}{5} \\ |1-\omega^3|=2\left|\sin\dfrac{3\pi}{5}\right|=2\sin\dfrac{3\pi}{5} \\ |1-\omega^4|=2\left|\sin\dfrac{4\pi}{5}\right|=2\sin\dfrac{4\pi}{5} \end{cases}$$

辺々かけると

$$16I=|(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)|$$

(2) の (ii) より，$16I=5$ を得るため，$I=\dfrac{5}{16}$ … 答

【総括】

今回は 1 の 5 乗根の扱いを中心とした基本問題でした。

ド・モアブルの定理を利用して最後の sin の積を求めさせる今回の流れもよくあるオチです。