複素数 $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ に対し，次の値を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) $\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6$

(2) $\dfrac{1}{1-\alpha}+\dfrac{1}{1-\alpha^6}$

(3) $\dfrac{1}{1-\alpha}+\dfrac{1}{1-\alpha^2}+\dfrac{1}{1-\alpha^3}+\dfrac{1}{1-\alpha^4}+\dfrac{1}{1-\alpha^5}+\dfrac{1}{1-\alpha^6}$

(4) $\dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}+\dfrac{\alpha^4}{1-\alpha^2}+\dfrac{\alpha^6}{1-\alpha^3}+\dfrac{\alpha^8}{1-\alpha^4}+\dfrac{\alpha^{10}}{1-\alpha^5}+\dfrac{\alpha^{12}}{1-\alpha^6}$

＜ '03 神戸大 ＞

【戦略】

ド・モアブルの定理から $\alpha^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$**，すなわち**

$$\alpha^7=1$$

となります。

直接計算ではなく，この $\alpha^7=1$ **という式を上手く使いながら与えられた式を求めていくことを考えます。**

(1) **肝となるのは** $\alpha^7-1=(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)$ **という因数分解です。**

この因数分解はパッと見えるべきですが，

$$\begin{aligned}\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6&=\frac{\alpha(1-\alpha^6)}{1-\alpha}\\&=\frac{\alpha-\alpha^7}{1-\alpha}\\&=\frac{\alpha-1}{1-\alpha}\end{aligned}$$

というように，等比数列の和として処理することも可能です。

(2) $\dfrac{1}{1-\alpha^6}$ **に対して，**α^7 **を登場させるために分母・分子に** α **をかければ** $\dfrac{1}{1-\alpha^6}=\dfrac{\alpha}{\alpha-\alpha^7}=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$ **となり，与式は** $\dfrac{1}{1-\alpha}+\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$ **となります。**

(3) (2) **がヒントであり，**

$$\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha^6}\right)+\left(\frac{1}{1-\alpha^2}+\frac{1}{1-\alpha^5}\right)+\left(\frac{1}{1-\alpha^3}+\frac{1}{1-\alpha^4}\right)$$

というペアで見たくなると思います。

要領としては (2) **と同じです。**

(4) **「頭でっかちは嫌われる」いう格言に従って，各項を帯分数に直したいと思います。**

つまり，

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha}=-(1+\alpha)+\frac{1}{1-\alpha},\quad \frac{\alpha^4}{1-\alpha^2}=-(1+\alpha^2)+\frac{1}{1-\alpha^2},\quad \cdots\cdots$$

と考えていきますが，記述では

$$\frac{\alpha^{2k}}{1-\alpha^k}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$$

と，一般的にまとめてしまいます。

【解答】

ド・モアブルの定理より，$\alpha^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$

すなわち $\alpha^7=1$ …(*)

(1) (*) より $\alpha^7-1=0$ で，$(\alpha-1)(\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\fallingdotseq 1$ であるため，この α は

$$\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$$

を満たす。

よって，$\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=-1$ …答

(2)
$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha^6}&=\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha-\alpha^7}\\&=\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha-1}\quad(\because (*))\\&=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\\&=1\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

(3) $(\text{与式})=\left(\dfrac{1}{1-\alpha}+\dfrac{1}{1-\alpha^6}\right)+\left(\dfrac{1}{1-\alpha^2}+\dfrac{1}{1-\alpha^5}\right)+\left(\dfrac{1}{1-\alpha^3}+\dfrac{1}{1-\alpha^4}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\alpha^2}+\frac{1}{1-\alpha^5}&=\frac{1}{1-\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\alpha^7}\\&=\frac{1}{1-\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}\quad(\because (*))\\&=\frac{1}{1-\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\alpha^3}+\frac{1}{1-\alpha^4}&=\frac{1}{1-\alpha^3}+\frac{\alpha^3}{\alpha^3-\alpha^7}\\&=\frac{1}{1-\alpha^3}+\frac{\alpha^3}{\alpha^3-1}\quad(\because (*))\\&=\frac{1}{1-\alpha^3}-\frac{\alpha^3}{1-\alpha^3}\\&=1\end{aligned}$$

(2) の結果も用いれば，(与式)$=1+1+1=3$ …答

(4) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$ として

$$\frac{\alpha^{2k}}{1-\alpha^k}=-(\alpha^k+1)+\frac{1}{1-\alpha^k}$$

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\sum_{k=1}^{6}\left\{\frac{1}{1-\alpha^k}-\alpha^k-1\right\}\\&=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{1-\alpha^k}-\sum_{k=1}^{6}\alpha^k-\sum_{k=1}^{6}1\\&=3-(-1)-6\ (\because (1),\ (3)\ \text{の結果})\\&=-2\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

n を正の整数として，

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

に対して，複素数平面上で様々なことが言えます。

①： 1，α，α^2，……，α^{n-1} は半径 1 の円上を n 等分する。

（これら n 個の点は正 n 角形の頂点をなす。）

②：ド・モアブルの定理から $\alpha^n=1$

②′：② より $\alpha^n-1=0$，すなわち

$$(\alpha-1)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+\alpha+1)=0$$

を得るため，特に $\alpha\neq1$ のとき

$$\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+\alpha+1=0$$

（ベクトル的に考えれば，① の正 n 角形の重心が原点）

このあたりは常識にしておくべき基本事項です。

これらを基に，本問のように様々な式を捌いていく問題が頻出です。