a，b，c は実数で $a+b+c=3$ とする。このとき，不等式

$$ab+bc+ca\leqq 3$$

が成り立つことを証明せよ。

< '97 島根大 >

【戦略 1】

1 文字消去の路線が思いつきやすい路線でしょうか。

$c=3-a-b$ **なので**

$$\begin{aligned}3-(ab+bc+ca)&=3-ab-b(3-a-b)-a(3-a-b)\\&=a^2+ab+b^2-3a-3b+3\end{aligned}$$

「文字の整理は 1 文字中心」という言葉にしたがえば

$$\begin{aligned}3-(ab+bc+ca)&=a^2+(b-3)a+b^2-3b+3\\&=\left(a+\frac{b-3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(b-3)^2+b^2-3b+3\\&=\left(a+\frac{b-3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2-\frac{3}{2}b+\frac{3}{4}\\&=\left(a+\frac{b-3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2\\&\geqq 0\end{aligned}$$

となり，解決です。

【解 1】

条件 $a+b+c=3$ より，$c=3-a-b$

$$\begin{aligned}3-(ab+bc+ca)&=3-ab-b(3-a-b)-a(3-a-b)\\&=a^2+ab+b^2-3a-3b+3\\&=a^2+(b-3)a+b^2-3b+3\\&=\left(a+\frac{b-3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2\\&\geqq 0\quad(\because\ a,\ b\ \text{は実数})\end{aligned}$$

となり，題意は示された。

【戦略 2】

条件式，示すべき不等式ともに入っている 3 という数字に目を付け

$ab+bc+ca\leqq a+b+c$ **を示せばよい**

と目を付けたかもしれません。

ただ，差をとって $a+b+c-(ab+bc+ca)$ と見てもここから右往左往することになる公算が大きいです。

これは左辺は 2 次，右辺は 1 次で次数が揃っていません。

そこで，示すべき不等式の次数を揃え

$$ab+bc+ca\leqq\frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

と見て，これを証明してみます。

途中で，$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geqq 0$ を示す必要性に遭遇します。

これは有名形であり

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&=\frac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-abc-2ca\}\\&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\end{aligned}$$

と見ます。

【解 2】

$a+b+c=3$ より，示すべき不等式は

$$ab+bc+ca\leqq\frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

であり，これを証明する。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)\\&=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-\frac{1}{3}(3ab+3bc+3ca)\\&=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=\frac{1}{6}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\&=\frac{1}{6}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\\&\geqq 0\quad(\because\ a,\ b,\ c\ \text{は実数})\end{aligned}$$

となり，題意は示された。

【総括】

スジが悪いと意外と右往左往するかもしれません。

愚直な１文字消去路線は，押しきれればよいですが，凝った不等式だと押し切れずに爆発してしまいます。

示すべき不等式を

$$ab+bc+ca \leqq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

と見ることは一見奇抜に見えるかもしれませんが，【戦略 2】で述べたように，次数を揃えるという点で見てやると自然に感じるでしょう。