2 次不等式

$$2x^2+(4-7a)x+a(3a-2)<0$$

の解がちょうど 3 個の整数を含むような正の定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

＜ '06 中京大 ＞

**【戦略】**

**ひとまずは，$(2x-a)\{x-(3a-2)\}<0$ と左辺を因数分解します。**

**この 2 次不等式の解に関わる $\dfrac{a}{2}$，$3a-2$ という大小によって場合分けが発生します。**

**つまり，$\begin{cases} a<\dfrac{4}{5} \\ a=\dfrac{4}{5} \\ a>\dfrac{4}{5} \end{cases}$ のときで場合が分かれることになります。**

**$a>0$ という条件も忘れずに考慮しましょう。**

**$0<a<\dfrac{4}{5}$ のときは与えられた 2 次不等式の解は $3a-2<x<\dfrac{a}{2}$ となります。**

**このとき，この区間に含まれる整数 $x$ が 3 個あるように仕組みたいのですが，この区間の幅 $\dfrac{a}{2}-(3a-2)\left(=2-\dfrac{5}{2}a\right)$ が 2 より小さくなってしまい，題意を実現できません。**

**次に $a=\dfrac{4}{5}$ のときはそもそもの 2 次不等式に解がありません。**

**最後に $a>\dfrac{4}{5}$ のときですが，$\dfrac{a}{2}<x<3a-2$ となります。**

**やはり，「幅」に注目し，$L=(3a-2)-\dfrac{a}{2}\left(=\dfrac{5}{2}a-2\right)$ を考えます。**

**この幅に含まれる整数が 3 個であるためには $2<L\leqq 4$ であることが必要です。**

**これより，$2<\dfrac{5}{2}a-2\leqq 4$，すなわち $\dfrac{8}{5}<a\leqq\dfrac{12}{5}$ を得ます。**

**このとき，$\dfrac{4}{5}<\dfrac{a}{2}\leqq\dfrac{6}{5}$ ですから $\begin{cases} \dfrac{a}{2}=0.***\cdots \\ \dfrac{a}{2}=1.***\cdots \end{cases}$ なのかで場合が分かれます。**

**$\dfrac{a}{2}<x<3a-2$ を満たす整数 $x$ が 3 個ということは，その 3 個は**

**$(1,2,3)$ または $(2,3,4)$**

**ということになります。**

【解答】

$2x^2+(4-7a)x+a(3a-2)<0$ は

$$(2x-a)\{x-(3a-2)\}<0 \quad \cdots(*)$$

と変形できる。

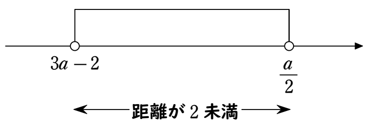
まず，$\dfrac{a}{2}$ と $3a-2$ の大小を踏まえ，$a>0$ という条件に注意しながら整理すると．$x$ の 2 次不等式 $(*)$ の解は

(i)　$3a-2<\dfrac{a}{2}$，すなわち $0<a<\dfrac{4}{5}$ のとき $3a-2<x<\dfrac{a}{2}$

(ii)　$3a-2=\dfrac{a}{2}$，すなわち $a=\dfrac{4}{5}$ のとき 解なし

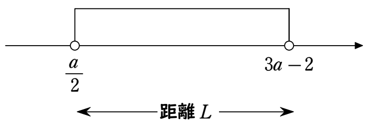
(iii)　$3a-2>\dfrac{a}{2}$，すなわち $a>\dfrac{4}{5}$ のとき $\dfrac{a}{2}<x<3a-2$

さて，(i) のとき




$\dfrac{a}{2}-(3a-2)=2-\dfrac{5}{2}a<2$ であり，この区間に整数が 3 個含まれることはあり得ない。

(iii) のとき




$L=(3a-2)-\dfrac{a}{2}$

$\quad=\dfrac{5}{2}a-2$ とおく。

このとき，$(*)$ を満たす整数 $x$ が 3 個存在するためには

$2<L\leqq 4$ である必要がある。

**$L\leqq 2$ だと整数を 3 個含まない**
**$L>4$ だと整数を 4 個以上含んでしまう**

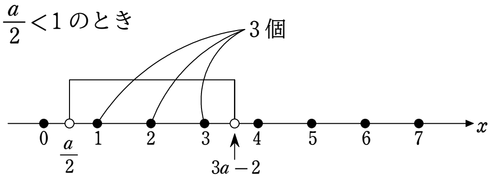
ゆえに，$2<\dfrac{5}{2}a-2\leqq 4$，すなわち $\dfrac{8}{5}<a\leqq\dfrac{12}{5}$ である必要がある。

このとき，$\dfrac{4}{5}<\dfrac{a}{2}\leqq\dfrac{6}{5}$ であることに注意して

(iii−1)　$\dfrac{4}{5}<\dfrac{a}{2}<1$ のとき　　(iii−2)　$1\leqq\dfrac{a}{2}\leqq\dfrac{6}{5}$ のとき

と場合分けする。

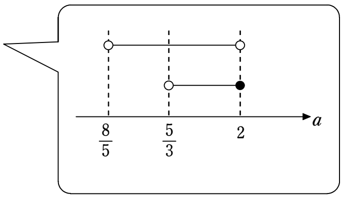
(iii−1)　$\dfrac{4}{5}<\dfrac{a}{2}<1$ のとき



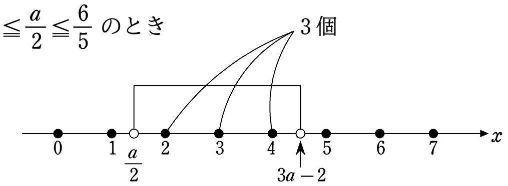

題意の 3 個の整数 $x$ は $x=1,\ 2,\ 3$ という 3 個である。

$$\begin{cases}\dfrac{4}{5}<\dfrac{a}{2}<1\\ 3<3a-2\leqq 4\end{cases},\ \text{すなわち}\ \begin{cases}\dfrac{8}{5}<a<2\\ \dfrac{5}{3}<a\leqq 2\end{cases}$$

よって，$\dfrac{5}{3}<a<2$



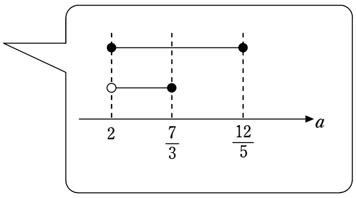

(iii−2)　$1\leqq\dfrac{a}{2}\leqq\dfrac{6}{5}$ のとき




題意の 3 個の整数 $x$ は $x=2,\ 3,\ 4$ という 3 個である。

$$\begin{cases}1\leqq\dfrac{a}{2}\leqq\dfrac{6}{5}\\ 4<3a-2\leqq 5\end{cases},\ \text{すなわち}\ \begin{cases}2\leqq a\leqq\dfrac{12}{5}\\ 2<a\leqq\dfrac{7}{3}\end{cases}$$

よって，$2<a\leqq\dfrac{7}{3}$




以上から，求める $a$ の範囲は

$$\frac{5}{3}<a<2\ \text{または}\ 2<a\leqq\frac{7}{3}\ \cdots\text{答}$$

**【戦略 2】**

**$(2x-a)\{x-(3a-2)\}<0$ を満たす $(a,\ x)$ を視覚化するとクリアーに話が進みます。**

【解 2】

$2x^2+(4-7a)x+a(3a-2)<0$ は

$$(2x-a)\{x-(3a-2)\}<0$$

と変形できる。

これは

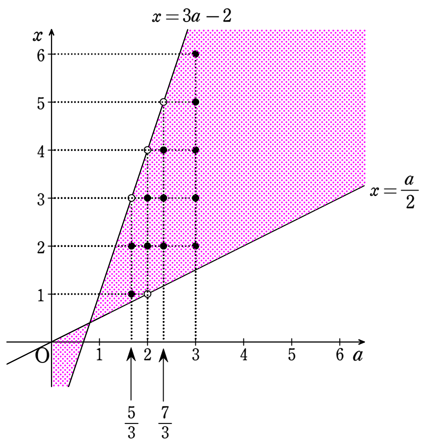
$$\begin{cases}2x-a>0\\ x-(3a-2)<0\end{cases}\ \text{または}\ \begin{cases}2x-a<0\\ x-(3a-2)>0\end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases}x>\dfrac{a}{2}\\ x<3a-2\end{cases}\ \text{または}\ \begin{cases}x<\dfrac{a}{2}\\ x>3a-2\end{cases}$$

これを満たす $a$，$x$ の値の組 $(a,\ x)$ を $ax$ 平面に図示する。

$a>0$ という条件に注意する。




$x$ が整数として 3 つ含まれるような $a$（$>0$）の範囲は

$$\frac{5}{3}<a<2\ \text{または}\ 2<a\leqq\frac{7}{3}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

式的処理と視覚的処理の 2 路線がありましたが，試験場で思いつきやすいのは【解 1】のような式的処理の路線でしょう。

区間に含まれる整数の個数を考えるにあたり，区間の幅に目を向けるのは当然でしょう。

【解 2】の視覚的処理は，ある意味「見たまんま」ですから見えれば早いに決まっています。