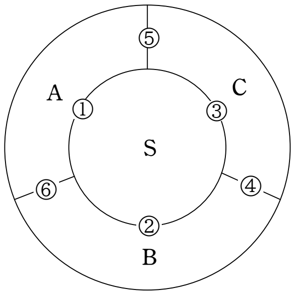
図のようにＳ，Ａ，Ｂ，Ｃ の４つの部屋があり，①～⑥のところには扉がついていて部屋から部屋に移動することができる。

たとえば，ＳからＢに行くには，②を通って直接行く方法のほかに，①，⑤，④を順に通っても行けるなど，いろいろな行き方がある。



いま，硬貨を投げることによって「通れない扉」を次のように定める。
①から⑥までの番号のついた６枚の硬貨を一斉に投げて，裏が出た番号の扉にすべて鍵をかけて「通れない扉」とする。
(表の出た番号の扉は自由に通れる)

このとき，Ａ，Ｂ，Ｃ の３つの部屋のうちでＳから行ける部屋の数を X で表す ($0 \leqq X \leqq 3$ である)。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $X=1$ である確率を求めよ。
(2) $X=3$ である確率を求めよ。

＜ '91 慶應義塾大 改 ＞

【戦略】

(1) **例えば，Ａのみに行ける場合を考えてみます。**

①の扉が閉まっていると，ＳからＡに行くためにはＢまたはＣを経由するしかなくなり，Ａのみに行けるということはありえないため①の扉は開いているしかありません。

②，③が開いているとＢ，Ｃ へ行けてしまうため，②，③は閉まっていることになります。

⑤，⑥についても同様に閉まっていないとＢ，Ｃ に行けてしまいます。

④については開いていようが閉まっていようが影響ありません。

したがって，$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 1 = \frac{1}{32}$ がＡのみに行ける確率です。

対称性からＢのみに行ける確率，Ｃのみに行ける確率も同様に $\frac{1}{32}$ ですから，$X=1$ となる確率は $\frac{1}{32} \times 3 = \frac{3}{32}$ ということになります。

(2) **直接 $X=3$ を考えるのはやりづらさを感じるので，余事象を考えてみます。**

$X=0$ となる場合は①，②，③ が閉まっている場合を考えればおしまいです。

次に $X=2$ の場合を考え，例えば，Ａ，Ｂのみに行ける場合を考えてみます。

Ｃにつながる③，④，⑤は閉まっている必要があります。

残りの①，②，⑥ についてですが，
⑥が開いているか閉まっているか
で場合分けをします。

⑥が開いているならば，①，②の少なくとも一つが開いていればよく
⑥が閉まっているならば，①，②の両方が開いていればよいことになります。

【解答】

(1) 例えばＡの部屋のみに行ける確率を考える。

①が閉まっていると，ＳからＡに行くためにはＢまたはＣの部屋を経由して行くことになり，Ａの部屋のみに行けることはありえない。

したがって，①の扉は開いている。

②，③の扉が開いているとＢ，Ｃの部屋にも行けてしまう。

ゆえに，②，③ の扉はともに閉まっている。

①の扉が開いている状態で，⑤，⑥の扉が開いているとＢ，Ｃの部屋にも行けてしまう。

ゆえに，⑤，⑥ の扉はともに閉まっている。

このとき，④は開いていても閉まっていても影響はない。

まとめると

(①，②，③，④，⑤，⑥)＝(開，閉，閉，△，閉，閉)
※ △はどちらでもよいことを表す。

となっていればよく，確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 1 = \frac{1}{32}$

Ｂの部屋のみに行ける確率，Ｃの部屋のみに行ける確率も同様に $\frac{1}{32}$ であるので，$X=1$ となる確率は

$$\frac{1}{32} \times 3 = \frac{3}{32} \quad \cdots 答$$

(2) $X=0$ となるときは ①，②，③ が閉まっていさえすればよい。

よって，$X=0$ となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$X=2$ となる確率について考える。

例えばＡ，Ｂの部屋のみに行ける確率について考える。

Ａ，Ｂ に行けるときはＣにつながる③，④，⑤は閉まっている。

残る①，②，⑥について

(i) ⑥が開いているとき (確率 $\frac{1}{2}$)
①，②の両方が閉まっているということさえなければよく，
その確率は $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

(ii) ⑥が閉まっているとき (確率 $\frac{1}{2}$)
①，②の両方が開いている必要があり，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

よって，Ａ，Ｂ のみに行ける確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{16}$

Ｂ，Ｃのみに行ける確率，Ｃ，Ａのみに行ける確率も同様に $\frac{1}{16}$

$X=2$ となる確率は $\frac{1}{16}\times 3=\frac{3}{16}$

$X=0, 1, 2, 3$ となる事象は排反であり，$X=3$ となる確率を p とすると

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{3}{16}+p=1$$

これより，$p=\frac{19}{32}$

$X=3$ となる確率は $\frac{19}{32}$ …答

【総括】

「モデルケースを考えて，他も同様」という流れで頭を動かすことは本問に限らず有効な打開策になることが多いです。