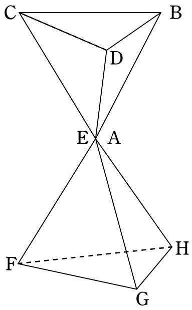
p を $0<p<1$ を満たす実数とする。

(1)　四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率 p で電流を通すものとする。
このとき，頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。
ただし，各辺が電流を流すか流さないかは独立で，辺以外では電流を通さないものとする。

(2)　(1) で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を図のように頂点 A と頂点 E でつないだとき，頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。



＜ '99 東京大 ＞

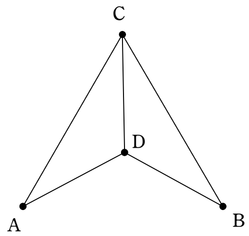
【戦略】

(1)　**多くの人は AB が切れてるかどうかで場合分けをします。**

AB が繋がっていればおしまいで，その確率は p

問題は AB が切れてるときです。

右の図で A から B へ電流が流れる経路はたくさんあります。



例えば

ACB といく経路，ADB といく経路
ACDB といく経路 … などがあります。

これだけ見るとなんか数えられそうと思いますが，もちろん各々の場合において重複が発生したりしてますから，大騒ぎになります。

確かに AB が繋がっているかどうかは AB が繋がっていれば簡単ですから ,そうしたくなるのも無理はありません。

しかし，この態度は 全部で 10 ある困難を 1 と 9 に振り分けているようなものです。

たいして労力が減っていないのです。

当たり前ですが，その後の困難（労力）を最も小さくするためには 5 と 5 に振り分けるのが理想的です。

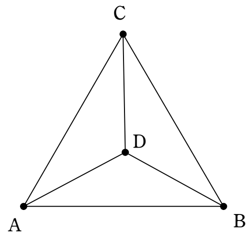
そうなると，A と B から見て全く対等な立場にある「辺 CD」に注目し，これが繋がっているかどうかで場合分けすればよさそうです。

(2)　**B から A (E) に電流が流れる，かつ A (E) から F に電流が流れる**

という事象を捉えればよく，各々の起こる確率は (1) で考えた確率と等しく，それぞれの事象は独立であるため，(1) の確率の 2 乗を考えればおしまいです。

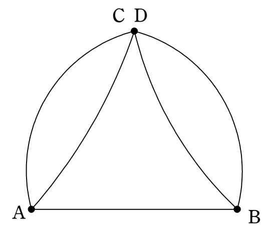
【解答】

(1)



という平面回路図で考えてもよい。

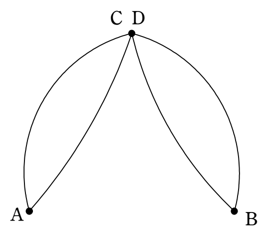
(i)　CD が電流を通すとき (確率 p)



C，D はくっつけて考えて構わない。

(i−1)　AB が電流を通すとき (確率 p) このときは無条件で題意を満たす。

(i−2)　AB が電流を通さないとき (確率 $1-p$)



切れてる＆切れてるの余事象です。

A から C (D) へ電流を通す確率は $1-(1-p)^2=2p-p^2$

C (D) から B へ電流を通す確率は $1-(1-p)^2=2p-p^2$

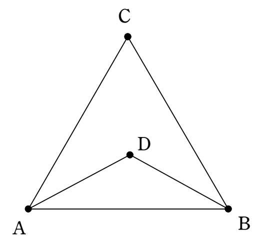
よって，このときのA から B へ電流を通す確率は

$$(1-p)\times(2p-p^2)^2=-p^5+5p^4-8p^3+4p^2$$

(i−1)，(i−2) から (i) のとき題意を満たす確率は

$$p\times\{p+(-p^5+5p^4-8p^3+4p^2)\}=-p^6+5p^5-8p^4+4p^3+p^2 \quad \cdots ①$$

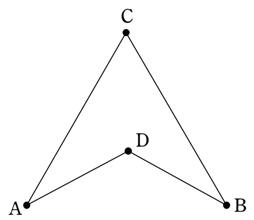
(ii)　CD が電流を通さないとき (確率 $1-p$)



という平面回路図で考える。

(ii−1)　AB が電流を通すとき (確率 p) このときは無条件で題意を満たす。

(ii−2)　AB が電流を通さないとき (確率 $1-p$)



$A \to C \to B$ という経路で電流が流れる確率 p^2

$A \to D \to B$ という経路で電流が流れる確率 p^2

よって，

「$A \to C \to B$ という経路で電流が流れる」

または

「$A \to D \to B$ という経路で電流が流れる」

となる確率は $p^2+p^2-p^4=2p^2-p^4$

(ii−1)，(ii−2) から (ii) のとき題意を満たす確率は

$(1-p)\times\{p+(1-p)(2p^2-p^4)\}=-p^6+2p^5+p^4-4p^3+p^2+p$ …②

①，② より，求める確率は

$$(-p^6+5p^5-8p^4+4p^3+p^2)+(-p^6+2p^5+p^4-4p^3+p^2+p)$$

$$=-2p^6+7p^5-7p^4+2p^2+p \quad \cdots 答$$

(2)　頂点 B から頂点 A (E) まで電流が流れる確率は (1) で考えた確率と等しい。

また，頂点 A (E) から頂点 F まで電流が流れる確率も (1) で考えた確率と等しい。

頂点 B から頂点 A (E) まで電流が流れるという事象と
頂点 A (E) から頂点 F まで電流が流れるという事象は独立であるため
求める確率は

$$(-2p^6+7p^5-7p^4+2p^2+p)^2 \quad \cdots 答$$

【総括】

【戦略】で述べた対称性に目を向けた場合分けを行わないと，グチャグチャになりかねません。

対称性に目を向け，CD が繋がっているかどうかで場合分けをしたあとは，普通に AB が繋がっているかどうかで考えればいいのですが，計算がかなり酷です。

試験場では酷な問題ですが，普段の勉強においては対称性の大切さを教えてくれる良問だと思います。