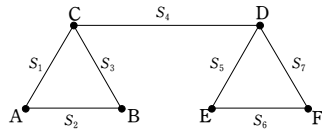


通・不通問題

6つの点A, …… , Fが図のように
7つの線分 $S_1, …… , S_7$ で結ばれて
いる。



7つのコイン $C_1, …… , C_7$ があり,
どのコインも表が出る確率は p で
裏が出る確率は $1-p$ であるとする。

これらを同時に投げて, C_k が表であれば S_k を青く塗り, C_k が裏であれば S_k を赤く塗る($k=1, …… , 7$)。この試行について次の問に答えよ。

- (1) 青い線分だけをたどってAからCに行くことができる確率を求めよ。
- (2) 青い線分だけをたどってAからFに行くことができる確率を求めよ。

<'13 学習院大>

【戦略】

- (1) $\triangle ABC$ 内だけで完結するのでどうとでもなります。

S_1 が青か赤かで場合分けすればよさそうです。

- (2) 頂点Xから出発し、青い線分だけをたどって頂点Yに行けるとき

「 $X \rightarrow Y$ は到達可能」

と表現します。

「 $A \rightarrow F$ は到達可能」とは

「 $A \rightarrow C$ は到達可能」

かつ

「 $C \rightarrow D$ は到達可能」

かつ

「 $D \rightarrow F$ は到達可能」

となることです。

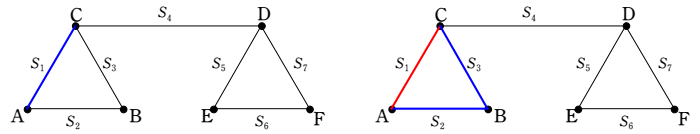
「 $A \rightarrow C$ が到達可能」である確率を q とすると

「 $D \rightarrow F$ が到達可能」である確率も対称性から q です。

【解答】

- (1) 求める確率を q とする。

S_1 が青 または 「 S_1 が赤 かつ S_2, S_3 がともに青」となる確率が q



よって, $q = p + \{(1-p) \cdot p \cdot p\} = p(1+p-p^2) \dots$ 罫

- (2) 頂点Xから出発し、青い線分だけをたどって頂点Yに行けるとき

「 $X \rightarrow Y$ は到達可能である」

と呼ぶ。

「 $A \rightarrow F$ は到達可能」とは

「 $A \rightarrow C$ は到達可能」

かつ

「 $C \rightarrow D$ は到達可能」

かつ

「 $D \rightarrow F$ は到達可能」

となることである。

「 $A \rightarrow C$ は到達可能」となる確率は(1)から $q = p(1+p-p^2)$

「 $A \rightarrow C$ は到達可能」となる確率は p

「 $D \rightarrow F$ は到達可能」となる確率は対称性から q であり

$$q = p(1+p-p^2)$$

求める確率は

$$\begin{aligned} q \cdot p \cdot q &= pq^2 \\ &= p \{ p(1+p-p^2) \}^2 \\ &= p^3(1+p-p^2)^2 \dots \text{罫} \end{aligned}$$

【総括】

本問のような「通・不通問題」は下手に場合分けをすると重複が発生したりして大騒ぎになる可能性があります。

本問はそこまででしたが、もう少し複雑になる問題について類題を準備していますので活用してみてください。