実数 a，b に対し，x についての 2 次方程式 $x^2-2ax+b=0$ は，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつとする。

このとき，a，b が満たす条件を求め，点 (a,b) の存在範囲を図示せよ。

＜ '03 大阪市立大 ＞

【戦略 1】

2 次方程式の解に関して注文が入る「解の配置問題」です。

その中でも本問は「少なくとも 1 つ」というタイプで，手際が悪いとグチャグチャになります。

方程式の解を「グラフの交点 (の x 座標)」と捉えて考えていくのが基本路線です。

その際，多くの人は $=0$ を相手にしがちですが，

ここでは，考えやすいように左辺と右辺を組み替えて考えていきます。

まずは

$$-x^2+2ax=b$$

と，組み替えてみます。

これは水平線 $y=b$ を動かして，交点を捉える方針で，「定数分離」に近いニュアンスで考える作戦です。

【解答】

与えられた 2 次方程式は $-x^2+2ax=b$，すなわち

$$-x(x-2a)=b$$

であり，$f(x)=-x(x-2a)$ とおく。

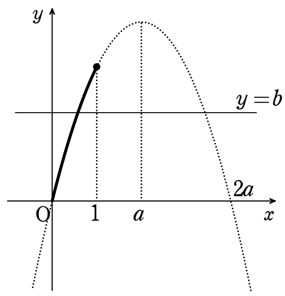
$y=f(x)$ と $y=b$ が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で少なくとも 1 つ交点をもつための条件を考えればよい。

(i)　$a>0$ のとき

(i−1)　$a\geqq 1$ のとき

$0\leqq b\leqq f(1)$

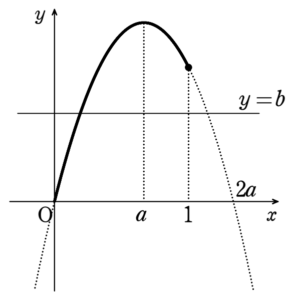
$0\leqq b\leqq 2a-1$



(i−2)　$a\leqq 1\leqq 2a$，すなわち $\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき

$0\leqq b\leqq f(a)$

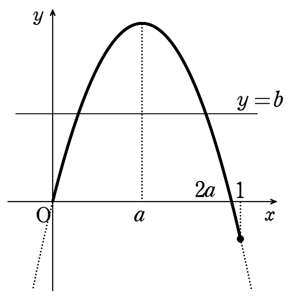
$0\leqq b\leqq a^2$



(i−3)　$2a\leqq 1$，すなわち $0<a\leqq\frac{1}{2}$ のとき

$f(1)\leqq b\leqq f(a)$

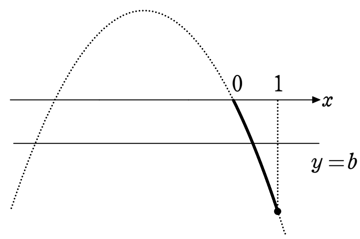
$2a-1\leqq b\leqq a^2$



(ii)　$a<0$ のとき

$f(1)\leqq b\leqq 0$

$2a-1\leqq b\leqq 0$

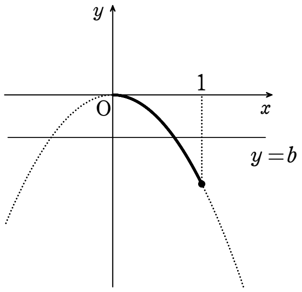


© MathClinic

(iii)　$a=0$ のとき

$f(1) \leqq b \leqq 0$

これは (ii) の場合に含めてよい。



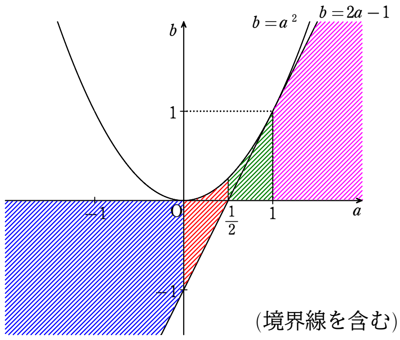
(i), (ii), (iii) から

$2a-1 \leqq b \leqq 0$　($a \leqq 0$ のとき)

$2a-1 \leqq b \leqq a^2$　$\left(0<a \leqq \dfrac{1}{2}\text{ のとき}\right)$

$0 \leqq b \leqq a^2$　$\left(\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1\text{ のとき}\right)$

$0 \leqq b \leqq 2a-1$　($a \geqq 1$ のとき)



(境界線を含む)

【戦略 2】

$x^2-2ax+b=0$ と，$=0$ を相手にしたまま考えてみます。

その場合 $f(x)=x^2-2ax+b$ として

$f(x)=0$ の解が重解も 2 つと考えて $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に 2 つあるとき

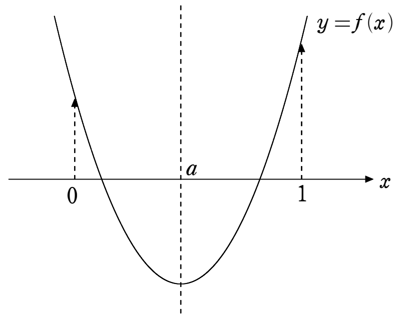
$f(x)=0$ の解のうち，$\begin{cases} 1\text{ つが } 0 \leqq x \leqq 1 \\ \text{他方が } x \leqq 0 \text{ または } 1 \leqq x \end{cases}$ の範囲にあるとき

と分けるのが王道的な分類です。

【解 2】

$f(x)=x^2-2ax+b\ (\,=(x-a)^2-a^2+b\,)$ とおく。

(i)　$f(x)=0$ の解が $0 \leqq x \leqq 1$ に2 つ解をもつとき (重解も 2 つと考える)



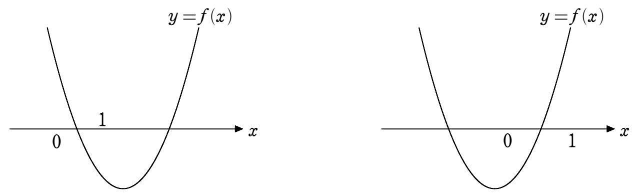
軸について　$0 \leqq a \leqq 1$

頂点の y 座標について　$f(a) \leqq 0$，すなわち　$-a^2+b \leqq 0$

$f(0) \geqq 0$，すなわち　$b \geqq 0$

$f(1) \geqq 0$，すなわち　$1-2a+b \geqq 0 \iff b \geqq 2a-1$

(ii)　$f(x)=0$ の解のうち，一つが $0 \leqq x \leqq 1$，他方が $x \leqq 0$，$1 \leqq x$ の範囲にあるとき



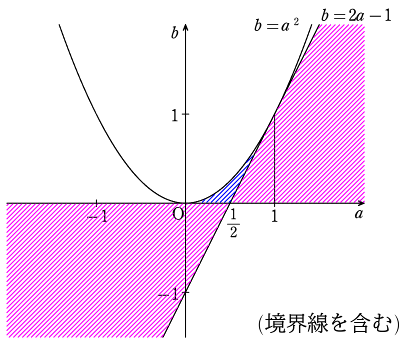
$f(0)f(1) \leqq 0$　すなわち　$b(1-2a+b) \leqq 0$

よって，$\begin{cases} b \geqq 0 \\ b \leqq 2a-1 \end{cases}$　または　$\begin{cases} b \leqq 0 \\ b \geqq 2a-1 \end{cases}$

以上から，まとめると

$\begin{cases} 0 \leqq a \leqq 1 \\ b \leqq a^2 \\ b \geqq 0 \\ b \geqq 2a-1 \end{cases}$　または　「$\begin{cases} b \geqq 0 \\ b \leqq 2a-1 \end{cases}$　または　$\begin{cases} b \leqq 0 \\ b \geqq 2a-1 \end{cases}$」

これを図示すると



(境界線を含む)

© MathClinic

【総括】

「少なくとも１つ」というタイプの解の配置は，嫌だなと思う人も多いと思いますが，問題を解き進めていくとこのタイプに帰着することは意外と多いです。

特に逆像法の問題など「存在すればよい」と翻訳する問題は，このタイプに帰着します。

何でもかんでも $=0$ を相手にするのではなく，考えやすいように柔軟に左辺と右辺を組み替えて考えるという姿勢も持ち合わせておきましょう。

© MathClinic