解の配置【左辺と右辺の組み換え】類題

xy 平面上の原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分 (両端を含む) を L とする。曲線 $y=x^2+ax+b$ が L と共有点をもつような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ。

< ’05 京都大 >

【戦略 1】

L は $y=2x$ のうち，$0\leqq x\leqq 1$ を満たす部分です。

本問が ”直線” であれば，a，b という 2 文字を含むものの教科書レベルの処理でいけますね。

$y=2x$ と $y=x^2+ax+b$ の交点の x 座標は，この 2 式を連立し，$x^2+ax+b=2x$，すなわち $x^2+(a-2)x+b=0$ という 2 次方程式の実数解ということになりますから，この 2 次方程式が少なくとも 1 つの実数解をもち，判別式を D とすれば，$D\geqq 0$ と処理すればいいのです。

ところが，本問の場合，”線分” なので，ただ単に実数解をもてばいいわけではなく，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ条件になります。

例題同様，$x^2+(a-2)x+b=0$ をそのまま相手にするのではなく

$-x^2-(a-2)x=b$，すなわち $-x\{x-(2-a)\}=b$ と見ることにします。

【解答】

$L: y=2x\ (0\leqq x\leqq 1)$ とする。

$y=x^2+ax+b$ と L が少なくとも 1 つ共有点をもつ条件は

$x^2+ax+b=2x$，すなわち

$$-x\{x-(2-a)\}=b$$

が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつということである。

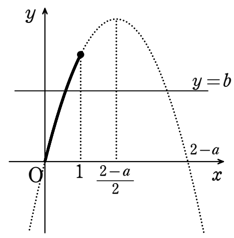
$f(x)=-x\{x-(2-a)\}$ とおき，$y=f(x)$ と $y=b$ が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で少なくとも 1 つ交点をもつための条件を考えればよい。

(i) $0<2-a$，すなわち $a<2$ のとき

(i−1) $1\leqq \dfrac{2-a}{2}$，すなわち $a\leqq 0$ のとき

$0\leqq b\leqq f(1)$

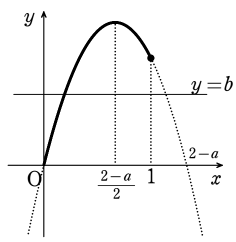
$0\leqq b\leqq -a+1$



(i−2) $\dfrac{2-a}{2}\leqq 1\leqq 2-a$，すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

$0\leqq b\leqq f\left(\dfrac{2-a}{2}\right)$

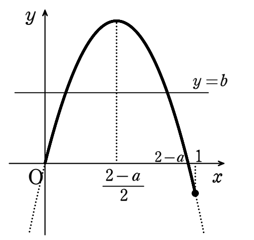
$0\leqq b\leqq \dfrac{1}{4}(a-2)^2$



(i−3) $2-a\leqq 1$，すなわち $1\leqq a<2$ のとき

$f(1)\leqq b\leqq f\left(\dfrac{2-a}{2}\right)$

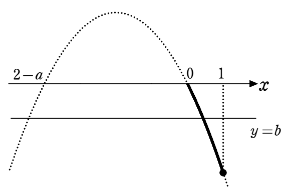
$-a+1\leqq b\leqq \dfrac{1}{4}(a-2)^2$



(ii) $2-a<0$，すなわち $a>2$ のとき

$f(1)\leqq b\leqq 0$

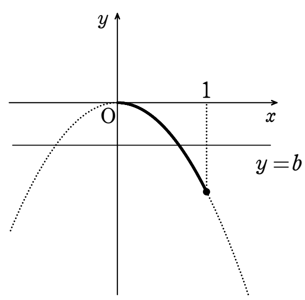
$-a+1\leqq b\leqq 0$



(iii) $2-a=0$，すなわち $a=2$ のとき

$f(1)\leqq b\leqq 0$

これは (ii) の場合に含めてよい。



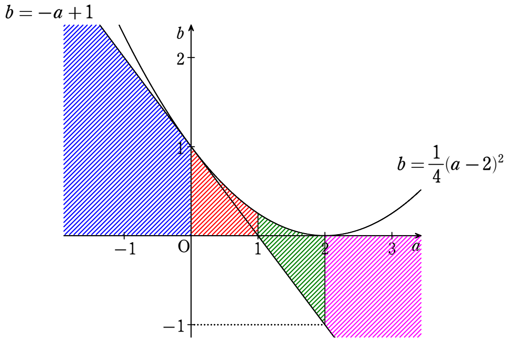
(i)，(ii)，(iii) から

$$0 \leqq b \leqq -a+1 \quad (a \leqq 0 \text{ のとき})$$

$$0 \leqq b \leqq \frac{1}{4}(a-2)^2 \quad (0 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき})$$

$$-a+1 \leqq b \leqq \frac{1}{4}(a-2)^2 \quad (1 \leqq a < 2 \text{ のとき})$$

$$-a+1 \leqq b \leqq 0 \quad (a \geqq 2 \text{ のとき})$$



(境界線を含む)

【戦略 2】

$x^2+(a-2)x+b=0$ と，$=0$ を相手にしたまま考えてみます。

その場合 $f(x)=x^2+(a-2)x+b$ として，例題同様

$f(x)=0$ の解が重解も 2 つと考えて $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に 2 つあるとき

$f(x)=0$ の解のうち，$\begin{cases} 1 \text{ つが } 0 \leqq x \leqq 1 \\ \text{他方が } x \leqq 0 \text{ または } 1 \leqq x \end{cases}$ の範囲にあるとき

と分けます。

【解 2】

$L: y=2x \ (0 \leqq x \leqq 1)$ とする。

$y=x^2+ax+b$ と L が少なくとも 1 つ共有点をもつ条件は

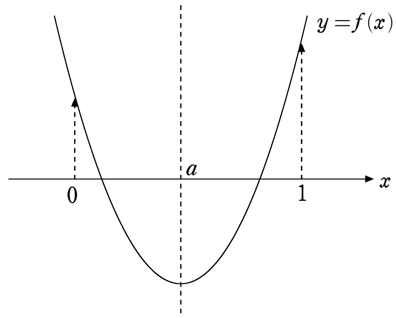
$x^2+ax+b=2x$，すなわち

$$x^2+(a-2)x+b=0$$

が $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつということである。

$f(x)=x^2+(a-2)x+b \ \left(=\left(x+\dfrac{a-2}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}(a-2)^2+b \right)$ とおく。

(i) $f(x)=0$ の解が $0 \leqq x \leqq 1$ に2 つ解をもつとき（重解も 2 つと考える）



軸について $0 \leqq -\dfrac{a-2}{2} \leqq 1$

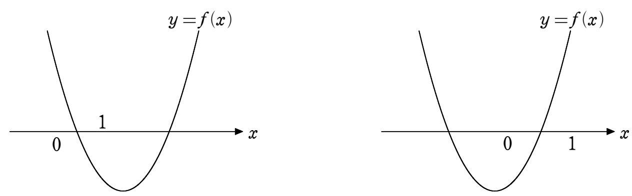
頂点の y 座標について $f\left(-\dfrac{a-2}{2}\right) \leqq 0$，すなわち

$$-\frac{1}{4}(a-2)^2+b \leqq 0$$

$f(0) \geqq 0$，すなわち $b \geqq 0$

$f(1) \geqq 0$，すなわち $1+a-2+b \geqq 0 \Leftrightarrow b \geqq -a+1$

(ii) $f(x)=0$ の解のうち，一つが $0 \leqq x \leqq 1$，他方が $x \leqq 0$，$1 \leqq x$ の範囲にあるとき



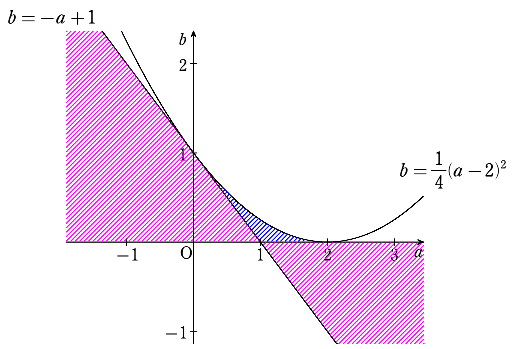
$f(0)f(1) \leqq 0$，すなわち $b(a+b-1) \leqq 0$

よって，$\begin{cases} b \geqq 0 \\ b \leqq -a+1 \end{cases}$ または $\begin{cases} b \leqq 0 \\ b \geqq -a+1 \end{cases}$

以上から，まとめると

$\begin{cases} 0 \leqq a \leqq 2 \\ b \leqq \dfrac{1}{4}(a-2)^2 \\ b \geqq 0 \\ b \geqq -a+1 \end{cases}$ または 「$\begin{cases} b \geqq 0 \\ b \leqq -a+1 \end{cases}$ または $\begin{cases} b \leqq 0 \\ b \geqq -a+1 \end{cases}$」

これを図示すると



(境界線を含む)

【戦略 3】

嫌だと思う原因を紐解いてみます。

$x^2+(a-2)x+b=0$ が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつ条件を追っていくことは，

「放物線の動きを追う」

ということであり，これが嫌な原因ですよね。

そこで，$-x^2+2x=ax+b$ と左辺と右辺を組み分けてみます。

a，b によって動くのは直線です。厄介な放物線は固定されています。

【解 3】

線分 L の方程式は $y=2x$ ($0\leqq x\leqq 1$)

直線 $y=2x$ と $y=x^2+ax+b$ の共有点の x 座標は 2 式を連立して y を消去した

$$x^2+ax+b=2x$$

すなわち，$-x^2+2x=ax+b$ $\cdots(*)$ の解

であり，線分 L と題意の放物線が共有点をもつので，$(*)$ が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつような a，b の条件を求める。

$(*)$ が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつ

$\Longleftrightarrow$

$\begin{cases} y=-x^2+2x \\ y=ax+b \end{cases}$ が $0\leqq x\leqq 1$ で少なくとも 1 つ共有点をもつ

$y=ax+b$ が $(0,\ 0)$ を通るときの y 切片 b は，$b=0$

$y=ax+b$ が $(1,\ 1)$ を通るときの y 切片 b は，$1=a+b$ を満たすので $b=1-a$

$y=ax+b$ が $y=-x^2+2x$ と $0\leqq x\leqq 1$ で接するときの y 切片 b について

連立して整理した $x^2+(a-2)x+b=0$ の判別式を D として，

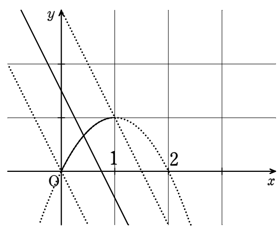
$$D=(a-2)^2-4b$$

$D=0$ より，$b=\frac{1}{4}(a-2)^2$

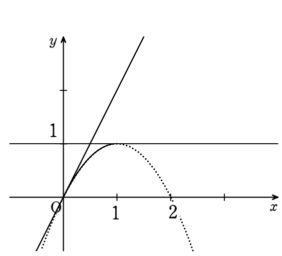
以上を踏まえて傾き a の値で場合分けをする。

(i) 傾き a が $a\leqq 0$ であるとき

y 切片 b が $0\leqq b\leqq 1-a$ を満たしていれば題意を満たす。

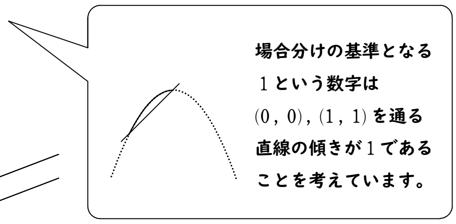


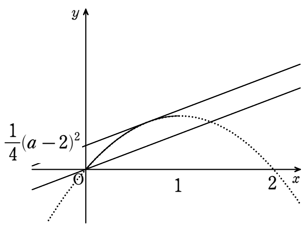
(ii) $0<a<2$ のとき



$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で接することができる傾き a は $0\leqq a\leqq 2$ ですね。
$a=0$，2 のときは別の単純な場合に入れた方が分かりやすいと思います。

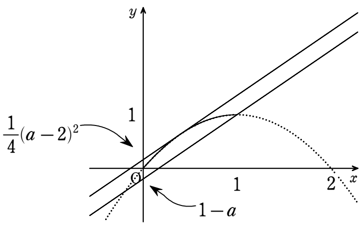
（ii－1）$0<a\leqq 1$ のとき





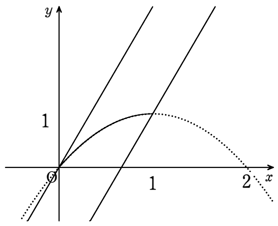
切片 b が $0\leqq b\leqq\frac{1}{4}(a-2)^2$ を満たしていれば題意を満たす。

（ii－2）$1\leqq a<2$ のとき



y 切片 b が $1-a\leqq b\leqq\frac{1}{4}(a-2)^2$ を満たしていれば題意を満たす。

(iii)　$a\geqq 2$ のとき

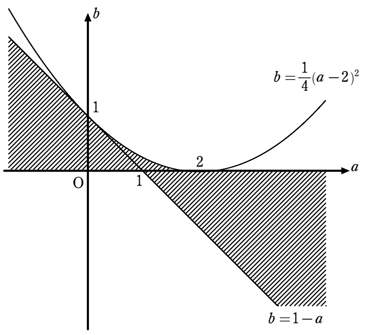


y 切片 b が $1-a\leqq b\leqq 0$ を満たしていれば題意を満たす。

以上から，題意を満たす a，b の条件は

$$\begin{cases} a\leqq 0 \text{ のとき } 0\leqq b\leqq 1-a \\ 0<a\leqq 1 \text{ のとき } 0\leqq b\leqq\frac{1}{4}(a-2)^2 \\ 1\leqq a<2 \text{ のとき } 1-a\leqq b\leqq\frac{1}{4}(a-2)^2 \\ a\geqq 2 \text{ のとき } 1-a\leqq b\leqq 0 \end{cases}$$

これを満たす点 $(a，b)$ を ab 平面上に図示すると下の図のようになる。
（境界線を含む）



【総括】

少々大袈裟ですが，例題のような左辺右辺の組み替えに加え，放物線を固定するという組み替え方もしてみました。

やってみたはいいものの，かえって別の部分で脳みそを使うことになり，思ったほどの労力は減らなかったなというのが感想です。