1，z，z^2 を３頂点にもつ三角形

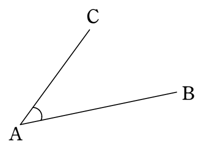
z を複素数とする。複素数平面上の３点 A(1)，B(z)，C(z^2) が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。

＜ ’16 東京大 ＞

【戦略】

一般論として，A(α)，B(β)，C(γ) に対して，

反時計回りの方向を角の正の向きとして $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を θ 回転させて $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の向きになったとすると



$(\gamma-\alpha)=(\beta-\alpha)\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)$ **ということなので**

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ **の符号付き角度（偏角）である** $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ **を計算することで** $\angle$BAC **を捉えることになります。**

今回は，時計回りに鋭角でも鋭角は鋭角なので，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg\square<\frac{\pi}{2}$$

として処理します。

【解答】

虚数 α に対して，$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$（$r>0$，$-\pi<\theta\leqq\pi$）としたとき

θ が鋭角 $\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\theta>0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\alpha)>0$

A，B，C は一直線上にないので，$\dfrac{z^2-1}{z-1}$ は虚数

すなわち $z\fallingdotseq 1$ かつ，$z+1$ は虚数， つまり，z は虚数

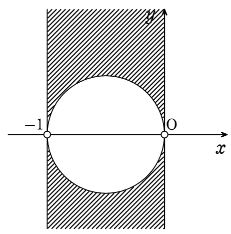
$$\begin{aligned}
\angle\mathrm{CAB}\ \text{が鋭角} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<\arg\frac{z^2-1}{z-1}<\frac{\pi}{2}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{z^2-1}{z-1}\right)>0\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z+1)>0\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)>-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\angle\mathrm{ABC}\ \text{が鋭角} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<\arg\frac{z^2-z}{1-z}<\frac{\pi}{2}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{z^2-z}{1-z}\right)>0\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}(-z)>0\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)<0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\angle\mathrm{BCA}\ \text{が鋭角} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<\arg\frac{1-z^2}{z-z^2}<\frac{\pi}{2}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{z}\right)>0\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}+|z|^2}{|z|^2}\right)>0\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}(\overline{z})>-|z|^2\\
&\Leftrightarrow \frac{z+\overline{z}}{2}>-z\overline{z}\\
&\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

以上より，求める z の範囲は

$$\begin{cases} -1<\dfrac{z+\overline{z}}{2}<0 \\ \left|z+\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad\cdots\text{答}$$



これを図示すると右の斜線部
（境界線は含まない）

【戦略 2】

$\triangle$ABC について

$$\angle \mathrm{ABC}\text{ が鋭角} \iff \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2>\mathrm{CA}^2$$
$$\angle \mathrm{BCA}\text{ が鋭角} \iff \mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>\mathrm{AB}^2$$
$$\angle \mathrm{CAB}\text{ が鋭角} \iff \mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2>\mathrm{BC}^2$$

という余弦定理の拡張による基本事項を用いても処理できるでしょう。

色々約分ができますが，そのために

1，z，z^2 が相異なる 3 点であるという条件

$$z\neq 1,\ z\neq z^2,\ z^2\neq 1$$

すなわち $z\neq 0$ かつ $z\neq 1$ であるということは最初にことわっておきます。

【解 2】

まず，1，z，z^2 が相異なる 3 点を表すので，

$$z\neq 1 \text{ かつ } z\neq z^2 \text{ かつ } z^2\neq 1$$

すなわち $z\neq 0$ かつ $z\neq 1$ …(☆)

$$\begin{cases} \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2>\mathrm{CA}^2 \\ \mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>\mathrm{AB}^2 \\ \mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2>\mathrm{BC}^2 \end{cases}\text{，すなわち}\begin{cases} |z-1|^2+|z^2-z|^2>|z^2-1|^2 & \cdots ① \\ |z^2-z|^2+|z^2-1|^2>|z-1|^2 & \cdots ② \\ |z^2-1|^2+|z-1|^2>|z^2-z|^2 & \cdots ③ \end{cases}$$

① は $|z-1|^2+|z|^2|z-1|^2>|z+1|^2|z-1|^2$

(☆) に注意すると $1+|z|^2>|z+1|^2$

$1+z\overline{z}>(z+1)(\overline{z}+1)$ で，これを整理すると $z+\overline{z}<0$

すなわち $\dfrac{z+\overline{z}}{2}<0$ を得るため，$\mathrm{Re}(z)<0$

② は $|z|^2|z-1|^2+|z+1|^2|z-1|^2>|z-1|^2$

(☆) に注意すると $|z|^2+|z+1|^2>1$

$z\overline{z}+(z+1)(\overline{z}+1)>1$ で，これを整理すると $2z\overline{z}+z+\overline{z}>0$

すなわち $z\overline{z}+\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2}\overline{z}>0$ で $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}$ を得る。

③ は $|z+1|^2|z-1|^2+|z-1|^2>|z|^2|z-1|^2$

(☆) に注意すると $|z+1|^2+1>|z|^2$

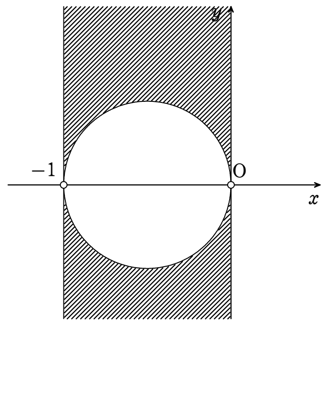
$(z+1)(\overline{z}+1)+1>z\overline{z}$ で，これを整理すると $z+\overline{z}+2>0$

すなわち $\dfrac{z+\overline{z}}{2}>-1$ を得るため，$\mathrm{Re}(z)>-1$

以上より，求める z の範囲は

$$\begin{cases} -1<\dfrac{z+\overline{z}}{2}<0 \\ \left|z+\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2} \end{cases}\cdots \text{答}$$

これを図示すると右の斜線部
(境界線は含まない)



【戦略 3】

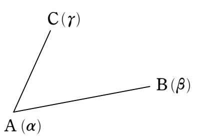
複素数 α, β, γ, α', β', γ' に対して，複素数平面上の点

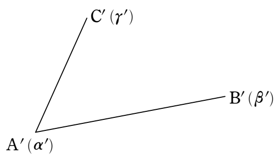
$$\mathrm{A}(\alpha),\ \mathrm{B}(\beta),\ \mathrm{C}(\gamma)\quad \mathrm{A}'(\alpha'),\ \mathrm{B}'(\beta'),\ \mathrm{C}'(\gamma')$$

を考えると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'} \text{ が成りたつ } \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{A'B'C'}$$

ということが言えます。





$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とするとき

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を θ 回転 & r 倍拡大 (縮小) して $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
$\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ を θ 回転 & r 倍拡大 (縮小) して $\overrightarrow{\mathrm{A'C'}}$

なので，2 辺の比率とその間の角が等しいことになり相似と言えます。

【注意】逆は成り立つとは限りません。逆向きの回転を考えると

$$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{A'B'C'} \Longleftrightarrow \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'} \text{ または } \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{\left(\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}\right)}$$

です。

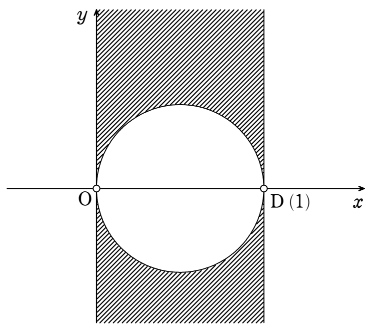
【解 3】

$\dfrac{z^2-1}{z-1}=z+1\left(=\dfrac{(z+1)-0}{1-0}\right)$ より，$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{D}(1)$，$\mathrm{E}(z+1)$ とすると

$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{ODE}$ なので，$\triangle\mathrm{ODE}$ が鋭角三角形となるための条件を考えればよい。

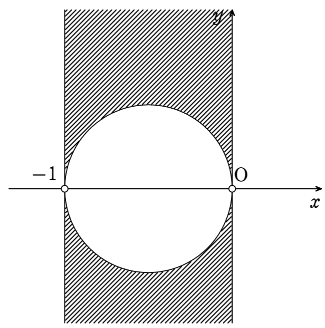
$w=z+1$ とおく。

線分 OD を直径とする円は，中心 $\dfrac{1}{2}$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円なので，w の存在範囲は以下の図の斜線部



$z=w-1$ なので，この図を実軸方向に -1 だけ平行移動させたものが z の存在範囲で

$$\begin{cases} -1<\dfrac{z+\overline{z}}{2}<0 \\ \left|z+\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \cdots 答$$



【総括】

様々な切り口から解くことができるでしょう。

$\angle\mathrm{BAC}$ を扱う際に $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を計算するというような，複素数平面における角度の扱いに習熟していれば【解 1】の路線が自然ですし，「鋭角」というものを翻訳するのに思いつきやすいのは【解 2】の路線ですから，試験場であればこのどちらかが現実的な方針でしょうか。