z，z^2，z^3 を３頂点にもつ三角形

複素数平面上で，3 つの複素数 z，z^2，z^3 の表す点をそれぞれ A，B，C とする。

ただし，3 点 A，B，C は互いに異なっているとする。

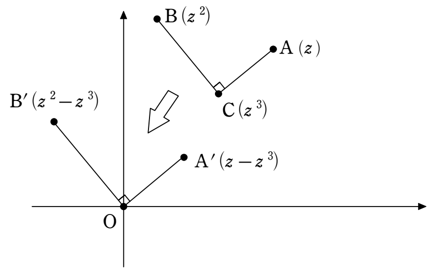
(1)　∠ACB が直角になる複素数 z の全体が表す図形を求めよ。

(2)　∠ACB が直角でかつ AC＝BC であるとき，複素数 z の値を求めよ。

＜ ’00 名古屋工業大 ＞

【戦略】

複素数平面において「直交」という条件を翻訳していきます。



と，回転の中心を原点に重ねて考えれば，

$$z^2-z^3=(z-z^3)\times●\{\cos(\pm 90^\circ)+i\sin(\pm 90^\circ)\}$$

ということになります。

慣れてくると

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$（**複素数平面では** $z-z^3$）**を回転させて** $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$（**複素数平面では** z^2-z^3）

ベクトル同様
ケツ － アタマ

を作ると捉えると，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\times$（**回転パーツ**）**というイメージでいちいち平行移動させなくてもパッと式を作ることができるはずです。**
（あとは自分で手を動かしていく中で定着させていきましょう）

z，z^2，z^3 **という設定なので，条件を翻訳していく中で色々約分ができます。**

$z\neq z^2$，$z^2\neq z^3$，$z^3\neq z$　**であることに注意しながら答案は作りましょう。**

【解答】

(1)　A(z)，B(z^2)，C(z^3) が互いに異なる点を表すので

$$\begin{cases} z\neq z^2 \\ z^2\neq z^3 \\ z^3\neq z \end{cases}，すなわち \begin{cases} z(z-1)\neq 0 \\ z^2(z-1)\neq 0 \\ z(z+1)(z-1)\neq 0 \end{cases}$$

これより，$z\neq 0$ かつ $z\neq 1$ かつ $z\neq -1$ …(*)

∠ACB＝90° となるとき，r を $r>0$ を満たす実数として

$\dfrac{z^2-z^3}{z-z^3}=r\{\cos(\pm 90^\circ)+i\sin(\pm 90^\circ)\}$ と表せる。

ゆえに，$\arg\dfrac{z^2-z^3}{z-z^3}=\pm 90^\circ$

(*) に注意すればこれは $\arg\dfrac{z}{1+z}=\pm 90^\circ$ ということになる。

つまり，$\dfrac{z}{1+z}$ は純虚数であり，$\dfrac{z}{1+z}+\overline{\left(\dfrac{z}{1+z}\right)}=0$

ゆえに，$\dfrac{z}{1+z}+\dfrac{\overline{z}}{1+\overline{z}}=0$

分母を払うと $z(1+\overline{z})+\overline{z}(1+z)=0$

$$2z\overline{z}+z+\overline{z}=0$$

$$z\overline{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}=0$$

$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

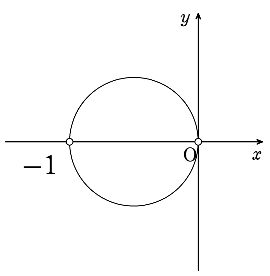
これより

$$\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

を得る。

よって，点 z は，点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円上の点であり，(*) を考えると，この円から点 -1 と点 0 を除いたものである。…答

これを図示すると



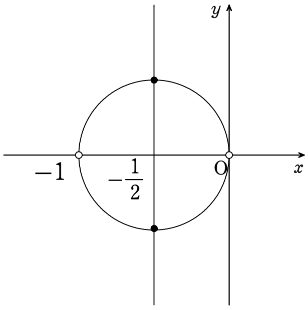
(2) $AC = |z - z^3|$
$= |z^3 - z|$
$= |z(z+1)(z-1)|$
$= |z||z+1||z-1|$

$BC = |z^2 - z^3|$
$= |z^3 - z^2|$
$= |z^2(z-1)|$
$= |z|^2|z-1|$

$AC = BC$ のとき，$|z||z+1||z-1| = |z|^2|z-1|$

(*) より，$|z+1| = |z|$

これを満たす z は複素数平面において，点 -1 と，点 0 を結ぶ線分の垂直二等分線上の点である。



(1) もふまえると，求める z は $z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$ …答

【総括】

点 z，z^2，z^3 を 3 頂点にもつ三角形を扱う問題はよくある問題で，類題を挙げればキリがありません。

大体が正三角形や直角三角形などの特殊な三角形で，その図形的特徴を式で翻訳していく翻訳力が問われる問題になります。

１つ１つの基本的な翻訳を丁寧にし，翻訳した式を的確に処理する処理力を完成させておくことが大切です。