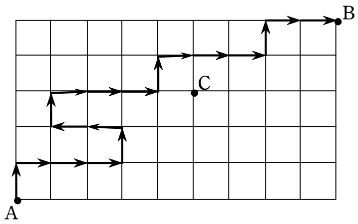
図のように東西に 6 本，南北に 10 本の道がある。
東西の道と南北の道の出会う地点を交差点と呼び，隣どうしの交差点を結ぶ道を区間ということにする。
A 地点から B 地点に進むとき，次の問いに答えよ。
ただし，どの交差点においても，東西および北のいずれかに進むことはできるが，南に進むことはできないとする。また，後戻りもできないとする。図の太線は道順の例を示したものである。
(1) A 地点から B 地点へ行く道順の総数を求めよ。
(2) C 地点を通って，A 地点から B 地点へ行く道順の総数を求めよ。
(3) A 地点から B 地点まで 16 区間で行く道順の総数を求めよ。

＜ '11 山口大 ＞



【戦略】

最短経路の問題は教科書にもある基本中の基本であり，多くの人ができるのですが，本問は最短経路ではありません。

この問題は「下がることはない」のですから，問題は「どこで上がるのか」ということに着目するのが急所となります。

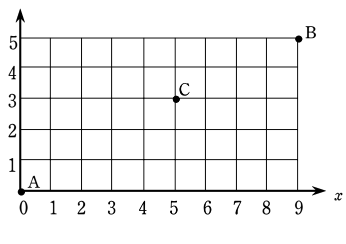
最後の (3) は難しいですが，結局は「同じものを含む並び替え問題」に帰着します。

まずは 16 回の移動の内訳を考えてみましょう。

【解答】

(1) A$(0, 0)$ とする座標平面で考える。

$k=0, 1, 2, 3, 4$ として
$y=k$ から $y=k+1$ へ移動する
x 座標を x_k とすると
$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ を決めれば
道順は一意的に決まる。



例えば問題文の例では
$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)=(0, 3, 1, 4, 7)$
に対応する。

x_k $(k=0, 1, 2, 3, 4)$ の決め方は各々 10 通りあるので
求める総数は $10^5=100000$ 【通り】… 答

(2) 点 C を通るのは次の 2 ケースである。

（Ⅰ）$0\leqq x_2\leqq 5$ かつ $5\leqq x_3\leqq 9$

（Ⅱ）$5\leqq x_2\leqq 9$ かつ $0\leqq x_3\leqq 5$

$x_2=x_3=5$ の場合が重複していることに注意すると，このような x_2，x_3 の選び方は

$$6\times5+5\times6-1=59 \text{【通り】}$$

x_0，x_1，x_4 の決め方は各々 10 通りなので，求める道順の総数は

$$59\times10^3=59000 \text{【通り】}\cdots \text{答}$$

(3) 16 区画で A 地点から B 地点に行くとき東に 10 回，西に 1 回，北に 5 回移動することになる。

「東」という文字 10 個，「西」という文字 1 個，「北」という文字 5 個を，次のルールによって並べる並べ方の総数を求めればよい。

（ルール）

①：最初の東の前に西を置くことはできない。
（「西」より左側には必ず東がある）

②：西の前に東を 10 個置くことはできない。
（「西」より右側には必ず東がある）

③：西の前後には必ず北を置く。

このような文字列は次のようにして作れる。

まず，○ 11 個と北 3 個を並べる（このような並べ方は ${}_{14}C_3$ 通り）
【例：○北○○○北○○○○○○○○北 】

注意：「北西北」という塊以外を並べる

次に一番左の○と一番右の○を東に置き換える。
（この置き換え方は 1 通り）
【例：東北○○○北○○○○○○東北】

注意：一番左の置き換えは①，一番右の置き換えは②を考慮

残った 9 個の ○を東 8 個と「北西北」という塊 1 個で置き換える。
（この置き換え方は ${}_{9}C_1$ 通り）

よって求める道順の総数は

$${}_{14}C_3\times1\times{}_{9}C_1=3276 \text{【通り】}\cdots \text{答}$$

【総括】

経験があれば，(1) は確保できるでしょう。

(3) はその場力勝負の難問です。