自然数 n に対して，$\sqrt{n}$ に最も近い整数を a_n とする。次の問いに答えよ。

(1) m を自然数とするとき，$a_n=m$ となる自然数 n の個数を m を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2001} a_k$ を求めよ。

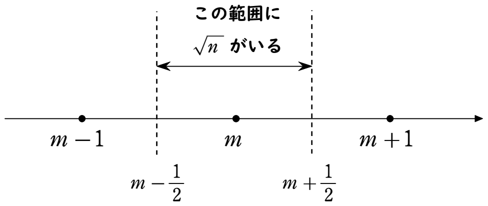
＜ ’01 横浜国立大 ＞

【戦略】

(1) **$a_n=m$，すなわち**

$\sqrt{n}$ に最も近い整数が m

ということは



というイメージから，$m-\dfrac{1}{2}<\sqrt{n}<m+\dfrac{1}{2}$ と立式できます。

両辺2乗すると，$m^2-m+\dfrac{1}{4}<n<m^2+m+\dfrac{1}{4}$ ということになり

これを満たす自然数 n は

$$n=m^2-m+1,\ m^2-m+2,\ \cdots\cdots,\ m^2+m$$

ですから，$(m^2+m)-(m^2-m+1)+1=2m$【個】ということになります。

(2) **(1) から数字 m が $2m$ 個並ぶことが分かったわけですから，この数列 $\{a_n\}$ は**

$$\underbrace{1,\ 1}_{\text{2個}}\ |\ \underbrace{2,\ 2,\ 2,\ 2}_{\text{4個}}\ |\ \underbrace{3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3}_{\text{6個}}\ |\ \cdots\cdots$$

第1群　第2群　第3群

という群数列として捉えることができます。

そうなってくると，a_{2001} が第何群の何番目かを把握すれば，あとは消化試合となります。

【解答】

(1) $a_n=m$ となるとき，$\sqrt{n}$ に最も近い整数が m ということになる。

これより，$m-\dfrac{1}{2}<\sqrt{n}<m+\dfrac{1}{2}$ であり

$$m^2-m+\frac{1}{4}<n<m^2+m+\frac{1}{4}$$

これを満たす自然数 n は

$$n=m^2-m+1,\ m^2-m+2,\ \cdots\cdots,\ m^2+m$$

という $(m^2+m)-(m^2-m+1)+1=2m$【個】

以上から，$a_n=m$ となる n は $2m$ 個 …答

(2) この数列 $\{a_n\}$ を

$$\underbrace{1,\ 1}_{\text{2個}}\ |\ \underbrace{2,\ 2,\ 2,\ 2}_{\text{4個}}\ |\ \underbrace{3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3}_{\text{6個}}\ |\ \cdots\cdots$$

第1群　第2群　第3群

と分ける。

第 k 群の末項までには

$$\begin{aligned}2+4+\cdots+2k&=2(1+2+\cdots+k)\\&=2\cdot\frac{k(k+1)}{2}\\&=k(k+1)\text{【個】}\end{aligned}$$

の項がある。

a_{2001} が第 M 群の N 番目だとする。

$$\begin{cases}(M-1)\cdot M<2001\leqq M(M+1)\ \cdots①\\(M-1)\cdot M+N=2001\ \cdots②\end{cases}$$

① を満たす自然数 M は $M=45$

② より $44\cdot45+N=2001$ で，$N=21$

ゆえに，a_{2001} は第45群の21番目である。

ここで，第 k 群の和を S_k とすると

$$\begin{aligned}S_k&=\overbrace{k+k+\cdots+k}^{2k\text{個}}\\&=k\cdot2k\\&=2k^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2001}a_k&=\sum_{i=1}^{44}S_i+\overbrace{(45+45+\cdots+45)}^{21\text{個}}\\&=\sum_{i=1}^{44}2i^2+45\cdot21\\&=2\cdot\frac{44\cdot45\cdot89}{6}+45\cdot21\\&=59685\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

$\sqrt{1}$（$=1$）

$\sqrt{2}$（$=1.41\cdots$）

$\sqrt{3}$（$=1.73\cdots$）

$\sqrt{4}$（$=2$）

$\sqrt{5}$（$=2.23\cdots$）

$\{a_n\}:1,1,2,2,2,\cdots$ のように，同じ数字が「ある程度」続きます。

この「ある程度」というのがどのぐらいなのかということを式として Get したくなるはずです。

「1が何個続くの？」「2が何個続くの？」…　ということを(1)で訊いてくれているわけですが，本来それは自分で考えるべきことでしょう。

なお，本問は $\sqrt{n}$ に最も近い整数を a_n としています。

つまり，切り上げ，切り捨ての両方があり得るわけですが，

$$a_n=[\sqrt{n}\ ]$$

と，整数部分を a_n と設定する（小数部分を切り捨てる）という問題もよくあります。

その場合も(1)のように $a_n=m$ となるような n が何個続くのかを把握し，群数列として考えます。