二項係数を次のように順番に並べて，数列 $\{a_n\}$ を定める。

$${}_0C_0,\ {}_1C_0,\ {}_1C_1,\ {}_2C_0,\ {}_2C_1,\ {}_2C_2,\ {}_3C_0,\ \cdots\cdots$$

ただし，${}_0C_0=1$ とする。

(1)　a_{18} を求めよ。

(2)　${}_nC_k$ は第何項になるか。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{50} a_n$ の値を求めよ。

＜ ’99 岐阜大 ＞

【戦略】

$${}_0C_0 \mid {}_1C_0,\ {}_1C_1 \mid {}_2C_0,\ {}_2C_1,\ {}_2C_2 \mid \cdots$$

第 1 群　第 2 群　　第 3 群

という群数列と見るのは問題ないでしょう。

第 k 群の末項までに $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ 個の項があることに注意します。

(1)　**a_{18} が第 m 群の ℓ 番目とすると**

$$\begin{cases} \dfrac{m(m-1)}{2}<18\leqq\dfrac{m(m+1)}{2} \\ \dfrac{m(m-1)}{2}+\ell=18 \end{cases}$$

という 2 式が立式できます。

(2)　**${}_nC_k$ は第 $n+1$ 群の $k+1$ 番目です。**

そこまでには

n 群の末項まで　　**はみ出た個数**

$(1+2+\cdots+n)+(k+1)$ **個**

の項があります。

(3)　**どこまで足すかを把握するために，a_{50} が第何群の何番目かを把握します。**

(1) **同様に，a_{50} が第 M 群の N 番目だとして**

$$\begin{cases} \dfrac{M(M-1)}{2}<50\leqq\dfrac{M(M+1)}{2} \\ \dfrac{M(M-1)}{2}+N=50 \end{cases}$$

とすれば，$M=10$，$N=5$ を得ます。

つまり，a_{50} は第 10 群の 5 番目ということになります。

群数列の和は

「群ごとに足していき，はみ出た部分は手作業で」

という態度が基本です。

【解答】

$${}_0C_0 \mid {}_1C_0,\ {}_1C_1 \mid {}_2C_0,\ {}_2C_1,\ {}_2C_2 \mid \cdots$$

第 1 群　第 2 群　　第 3 群

と区切り，前から第 1 群，第 2 群，… と呼ぶことにする。

第 k 群には k 個の項があり，第 k 群の末項までには

$$1+2+\cdots+k\left(=\sum_{i=1}^{k} i\right)=\frac{k(k+1)}{2}\ 【個】$$

の項がある。

(1)　a_{18} が第 m 群の ℓ 番目だとする。

$$\begin{cases} \dfrac{m(m-1)}{2}<18\leqq\dfrac{m(m+1)}{2} & \cdots ① \\ \dfrac{m(m-1)}{2}+\ell=18 & \cdots ② \end{cases}$$

① を満たす自然数 m は $m=6$

② より，$\dfrac{6\cdot5}{2}+\ell=18$ であり，$\ell=3$

ゆえに，a_{18} は第 6 群の 3 番目

したがって，$a_{18}={}_5C_2=10$ … 答

(2)　${}_nC_k$ は第 $n+1$ 群の $k+1$ 番目である。

すなわち，$a_{\frac{n(n+1)}{2}+(k+1)}$ が ${}_nC_k$ であり，${}_nC_k$ は

第 $\dfrac{n(n+1)}{2}+k+1$ 項 … 答

(3)　a_{50} が第 M 群の N 番目だとすると

$$\begin{cases} \dfrac{M(M-1)}{2}<50\leqq\dfrac{M(M+1)}{2} & \cdots ③ \\ \dfrac{M(M-1)}{2}+N=50 & \cdots ④ \end{cases}$$

③ を満たす自然数 M は $M=10$

④ より $\dfrac{10\cdot9}{2}+N=50$ で，$N=5$

よって，a_{50} は第 10 群の 5 番目である。

ここで，第 k 群の和を S_k とすると

$$\begin{aligned} S_k &= {}_{k-1}C_0+{}_{k-1}C_1+\cdots+{}_{k-1}C_{k-1} \\ &=(1+1)^{k-1}\ (\because\ \text{二項定理}) \\ &=2^{k-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{50} a_n &= \sum_{k=1}^{9} S_k + (a_{46}+a_{47}+a_{48}+a_{49}+a_{50}) \\
&= \sum_{k=1}^{9} 2^{k-1} + {}_9\mathrm{C}_0 + {}_9\mathrm{C}_1 + {}_9\mathrm{C}_2 + {}_9\mathrm{C}_3 + {}_9\mathrm{C}_4 \\
&= \frac{2^9-1}{2-1} + 1 + 9 + \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1} + \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \\
&= 767 \ \cdots \text{答}
\end{aligned}
$$

【総括】

個数にせよ，和にせよ

群ごとに数え (加え)，はみ出た部分は手作業

という態度が基本です。

「どこまではみ出るのか」を把握するために，ターゲット（問題になっている項）が第何群の何番目かを把握するのです。

本問は二項係数を扱っており，各群の和を計算する際に二項係数の和を計算する必要があります。

これについては，二項定理の活用という Σ 計算の基本運用力が必要です。