自然数からなる数列を次のように定義する。

1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, …, 1, 2, …, k, 1, 2, …, k, $k+1$, …

次の各問に答えよ。
(1) 上の数列において 10 が初めて現れるのは第何項であるか。
(2) 第 100 項を求めよ。
(3) 上の数列で 1 が現れる項に注目する。n 回目に現れる 1 は第何項であるか。n の式で表せ。

＜ '02 山形大 ＞

【戦略】

とりあえず記述のしやすさを考えて，この数列を $\{a_n\}$ とします。

1 | 1, 2 | 1, 2, 3 | 1, 2, 3, 4 | ……
第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

と区切って考えるいわゆる「群数列」の問題です。

群数列の基本は
「ターゲットが第何群の何番目か」
を把握することです。

そのために
「各群の末項までに何個の項があるか」
を把握する必要があります。

これは，

$$\overbrace{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_N}^{N\text{個}}$$

a_N という「添え字」と それまでに N 個あるという「個数」がリンクするからです。

(1) $\underbrace{a_1}_{1\text{個}} \mid \underbrace{a_2,\ a_3}_{2\text{個}} \mid \cdots\cdots \mid \underbrace{\qquad a_{\bigcirc}}_{10\text{個}} \mid$

というイメージがあれば，添え字と個数はリンクするという上述の話から
$\bigcirc=1+2+\cdots+10=55$ だと分かり，第 55 項だと分かります。

(2) **a_{100} (ターゲット) が第 M 群の N 番目だとします。**

第 $M-1$ 群　第 M 群

$$\mid a_{\bullet},\ \cdots\cdots,\ a_{\frac{M(M-1)}{2}} \mid \overbrace{a_{\frac{M(M-1)}{2}+1},\ \cdots,\ a_{100}}^{N\text{個}},\ \cdots,\ a_{\frac{M(M+1)}{2}} \mid$$

ここまでに $1+2+\cdots+(M-1)=\dfrac{M(M-1)}{2}$ **個**

ここまでに $1+2+\cdots+M=\dfrac{M(M+1)}{2}$ **個**

というイメージで $\begin{cases} \dfrac{M(M-1)}{2}<100\leqq\dfrac{M(M+1)}{2} \\ \dfrac{M(M-1)}{2}+N=100 \end{cases}$

と立式します。

(3) **n 回目の 1 とは，第 n 群の先頭です。**

【解答】

題意の数列を $\{a_n\}$ とし，

1 | 1, 2 | 1, 2, 3 | 1, 2, 3, 4 | ……
第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

と区切り，前から第 1 群，第 2 群，… と呼ぶことにする。

第 k 群には k 個の項があり，第 k 群の末項までには

$$1+2+\cdots+k\left(=\sum_{i=1}^{k} i\right)=\frac{k(k+1)}{2}\text{【個】}$$

の項がある。

(1) 最初の 10 という値は

第 10 群の 10 番目 (末項)

に現れる。

そこまでに現れる項の数は $\dfrac{10\cdot 11}{2}=55$【個】

ゆえに，第 10 群の 10 番目は a_{55} であり，第 55 項 … 答

(2) a_{100} が第 M 群の N 番目だとする。

a_{100} が第 M 群に入っているとは

$$\frac{M(M-1)}{2}<100\leqq\frac{M(M+1)}{2}\ \cdots ①$$

a_{100} が第 M 群の N 番目とは

$$\frac{M(M-1)}{2}+N=100\ \cdots ②$$

① を満たす自然数 M は $M=14$

$M(M-1)<200\leqq M(M+1)$
大体同じぐらいの数をかけて
200 近辺になるので $\sqrt{200}$ ($=10\sqrt{2}$)
ぐらいで探します

このとき② から $\dfrac{14\cdot 13}{2}+N=100$，すなわち $N=9$ を得る。

ゆえに，a_{100} は第 14 群の 9 番目なので，$a_{100}=9$ … 答

(3) n 回目に現れる 1 は

第 n 群の 1 番目

なので，$a_{\frac{n(n-1)}{2}+1}$，すなわち $a_{\frac{n^2-n+2}{2}}$ であり

第 $\dfrac{n^2-n+2}{2}$ 項目 … 答

【総括】

$$a_{●} \,\Big|\, \overbrace{a_{●+1},\ \cdots,\ a_n}^{N\text{個}},\ \cdots,\ a_{□} \,\Big|$$

ここまでに●個　　　　ここまでに□個

というイメージで $\begin{cases} ● < n \leqq □ \\ ● + N = n \end{cases}$ と手際よく式を立てましょう。