

群数列

自然数からなる数列を次のように定義する。

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 1, 2, \dots, k, 1, 2, \dots, k, k+1, \dots$$

次の各問に答えよ。

- (1) 上の数列において 10 が初めて現れるのは第何項であるか。
- (2) 第 100 項を求めよ。
- (3) 上の数列で 1 が現れる項に注目する。 n 回目に現れる 1 は第何項であるか。 n の式で表せ。

< '02 山形大 >

【戦略】

とりあえず記述のしやすさを考えて、この数列を $\{a_n\}$ とします。

$$1 \quad | \quad 1, 2 \quad | \quad 1, 2, 3 \quad | \quad 1, 2, 3, 4 \quad | \quad \dots$$

第 1 群 第 2 群 第 3 群 第 4 群

と区切って考えるいわゆる「群数列」の問題です。

群数列の基本は

「ターゲットが第何群の何番目か」

を把握することです。

そのために

「各群の末項までに何個の項があるか」

を把握する必要があります。

これは、

$$\overbrace{a_1, a_2, a_3, \dots, a_N}^{N \text{ 個}}$$

a_N という「添え字」とそれまでに N 個あるという「個数」がリンクするからです。

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} a_1 & | & a_2, a_3 & | & \dots & | & a_{10} \\ \text{1 個} & & \text{2 個} & & & & \text{10 個} \end{array}$$

というイメージがあれば、添え字と個数はリンクするという上述の話から

$$0 = 1 + 2 + \dots + 10 = 55 \text{ だと分かり、第 55 項だと分かります。}$$

- (2) a_{100} (ターゲット) が第 M 群の N 番目だとします。

第 $M-1$ 群 N 個 第 M 群

$$| a_1, \dots, a_{\frac{M(M-1)}{2}} \quad | \quad a_{\frac{M(M-1)}{2}+1}, \dots, a_{100}, \dots, a_{\frac{M(M+1)}{2}} |$$

ここまでに ← ← ここまでに

$$1+2+\dots+(M-1) = \frac{M(M-1)}{2} \text{ 個} \qquad \qquad \qquad 1+2+\dots+M = \frac{M(M+1)}{2} \text{ 個}$$

というイメージで

$$\begin{cases} \frac{M(M-1)}{2} < 100 \leq \frac{M(M+1)}{2} \\ \frac{M(M-1)}{2} + N = 100 \end{cases}$$

と立式します。

- (3) n 回目の 1 とは、第 n 群の先頭です。

【解答】

題意の数列を $\{a_n\}$ とし、

$$1 \quad | \quad 1, 2 \quad | \quad 1, 2, 3 \quad | \quad 1, 2, 3, 4 \quad | \quad \dots$$

第 1 群 第 2 群 第 3 群 第 4 群

と区切り、前から第 1 群、第 2 群、... と呼ぶことにする。

第 k 群には k 個の項があり、第 k 群の末項までには

$$1+2+\dots+k \left(= \sum_{i=1}^k i \right) = \frac{k(k+1)}{2} \text{ 【個】}$$

の項がある。

- (1) 最初の 10 という値は

$$\text{第 10 群の 10 番目 (末項)}$$

に現れる。

$$\text{そこまでに現れる項の数は } \frac{10 \cdot 11}{2} = 55 \text{ 【個】}$$

ゆえに、第 10 群の 10 番目は a_{55} であり、第 55 項 ... 圏

- (2) a_{100} が第 M 群の N 番目だとする。

a_{100} が第 M 群に入っているとは

$$\frac{M(M-1)}{2} < 100 \leq \frac{M(M+1)}{2} \dots \text{①}$$

a_{100} が第 M 群の N 番目とは

$$\frac{M(M-1)}{2} + N = 100 \dots \text{②}$$

$M(M-1) < 200 \leq M(M+1)$
 大体同じぐらいの数をかけて
 200 近辺になるので $\sqrt{200} (= 10\sqrt{2})$
 ぐらいで探します

- ① を満たす自然数 M は $M=14$

$$\text{このとき② から } \frac{14 \cdot 13}{2} + N = 100, \text{ すなわち } N = 9 \text{ を得る。}$$

ゆえに、 a_{100} は第 14 群の 9 番目なので、 $a_{100} = 9$... 圏

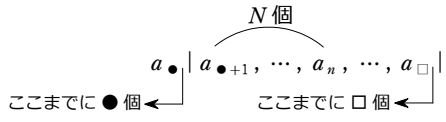
- (3) n 回目に現れる 1 は

第 n 群の 1 番目

なので、 $a_{\frac{n(n-1)}{2}+1}$ 、すなわち $a_{\frac{n^2-n+2}{2}}$ であり

$$\text{第 } \frac{n^2-n+2}{2} \text{ 項目 ... 圏}$$

【総括】



というイメージで $\begin{cases} \bullet < n \leq \square \\ \bullet + N = n \end{cases}$ と手際よく式を立てましょう。