2 つの関数を $f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく。

$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1, 2, \cdots\cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で

$$x_n=f_0(x_{n-1}) \text{ または } x_n=f_1(x_{n-1})$$

と定める。

このとき，$x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ。

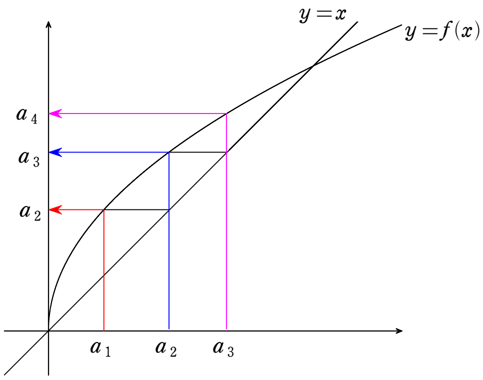
＜ ’15 京都大 ＞

【戦略】

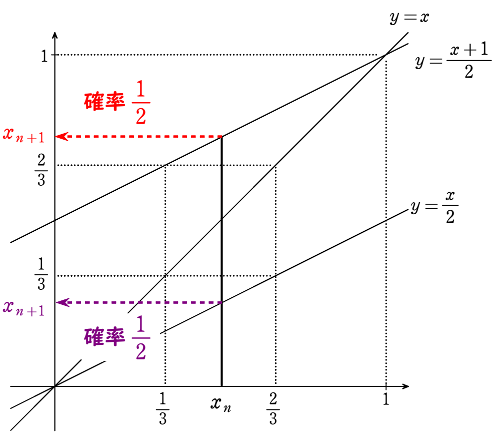
$a_{n+1}=f(a_n)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ を視覚化する際に

$y=f(x)$ とともに $y=x$ のグラフを添えて目で見ることは常套手段です。

$y=x$ を書くことで，縦軸の値を，横軸にもってこれるわけです。



本問の漸化式による値のふるまいを視覚化してみると

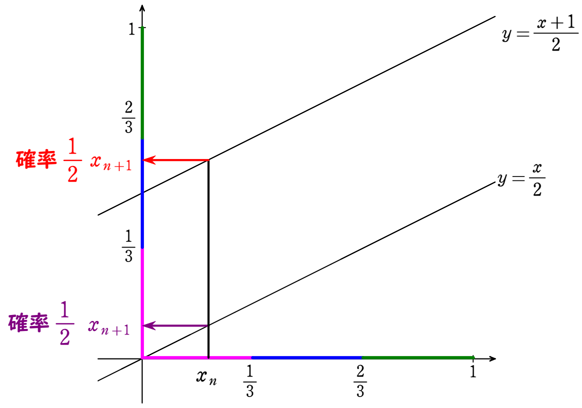


となり，$\dfrac{2}{3}$ の他にキーとなる「$\dfrac{1}{3}$」という値に辿り着きます。

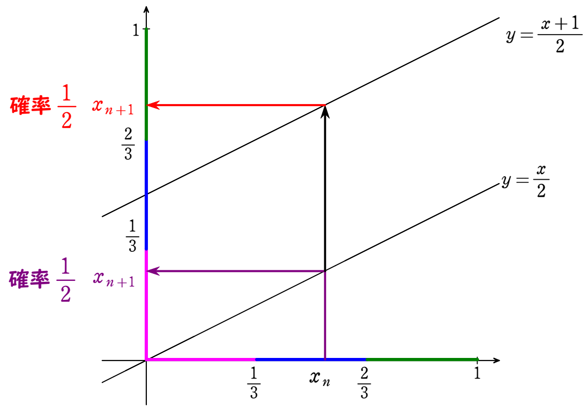
そこで，$0<x_n<\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}\leqq x_n<\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ である状態をそれぞれ

A_n，B_n，C_n として，A_n，B_n，C_n となる確率をそれぞれ

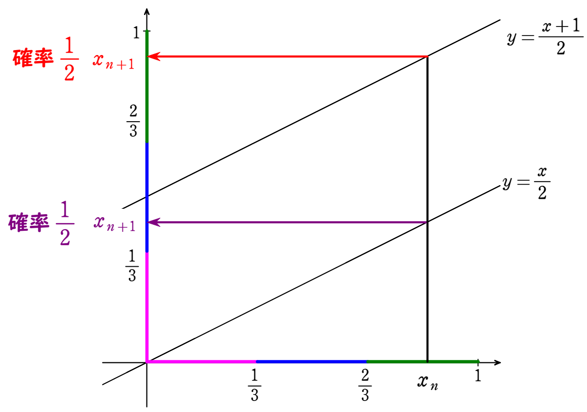
a_n，b_n，c_n とします。



A_n からは 確率 $\dfrac{1}{2}$ ずつで A_{n+1}，B_{n+1} のいずれかになります。



B_n からは確率 $\dfrac{1}{2}$ ずつで A_{n+1}，C_{n+1} のいずれかになります。



C_n からは確率 $\dfrac{1}{2}$ ずつで B_{n+1}，C_{n+1} のいずれかになります。

【解答】

まず，$n=0,1,2,\cdots$ に対して $0<x_n<1 \cdots (*)$ であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=0$ のとき $x_0=\dfrac{1}{2}$ より $(*)$ は成立する。

(ii)　$n=k\ (k=0,1,2,\cdots)$ のとき

　$0<x_k<1$ と仮定する。

　$x_{k+1}=\dfrac{x_k}{2}$ ならば，$0<\dfrac{x_k}{2}<\dfrac{1}{2}$ なので，$(*)$ は成立する。

　$x_{k+1}=\dfrac{x_k+1}{2}$ ならば $\dfrac{1}{2}<\dfrac{x_k+1}{2}<1$ なので，$(*)$ は成立する。

　いずれにせよ，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する。

以上 (i)，(ii) から $n=0,1,2,\cdots$ に対して $0<x_n<1$ が成立する。

次に，$\begin{cases} 0<x_n<\dfrac{1}{3} \text{ である状態を } A_n \\ \dfrac{1}{3}\leqq x_n<\dfrac{2}{3} \text{ である状態を } B_n \\ \dfrac{2}{3}\leqq x_n<1 \text{ である状態を } C_n \end{cases}$ とし，A_n，B_n，C_n となる確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする。

$0<x_n<\dfrac{1}{3}$ のとき

$$\begin{cases} f_0(x_n)=\dfrac{x_n}{2}\ (=x_{n+1}) \text{ で，} 0<x_{n+1}<\dfrac{1}{6}\left(<\dfrac{1}{3}\right) \\ f_1(x_n)=\dfrac{x_n+1}{2}\ (=x_{n+1}) \text{ で，} \left(\dfrac{1}{3}<\right)\dfrac{1}{2}<x_{n+1}<\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

よって，A_n からは $\begin{cases} \text{確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で } A_{n+1} \\ \text{確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で } B_{n+1} \end{cases}$ となる。

$\dfrac{1}{3}\leqq x_n<\dfrac{2}{3}$ のとき

$$\begin{cases} f_0(x_n)=\dfrac{x_n}{2}\ (=x_{n+1}) \text{ で，} (0<)\ \dfrac{1}{6}\leqq x_{n+1}<\dfrac{1}{3} \\ f_1(x_n)=\dfrac{x_n+1}{2}\ (=x_{n+1}) \text{ で，} \dfrac{2}{3}\leqq x_{n+1}<\dfrac{5}{6}\ (<1) \end{cases}$$

よって，B_n からは $\begin{cases} \text{確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で } A_{n+1} \\ \text{確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で } C_{n+1} \end{cases}$ となる。

$\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ のとき

$$\begin{cases} f_0(x_n)=\dfrac{x_n}{2}\ (=x_{n+1}) \text{ で，} \dfrac{1}{3}\leqq x_n<\dfrac{1}{2}\left(<\dfrac{2}{3}\right) \\ f_1(x_n)=\dfrac{x_n+1}{2}\ (=x_{n+1}) \text{ で，} \left(\dfrac{2}{3}\leqq\right)\dfrac{5}{6}\leqq x_{n+1}<1 \end{cases}$$

よって，C_n からは $\begin{cases} \text{確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で } B_{n+1} \\ \text{確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で } C_{n+1} \end{cases}$ となる。

以上から，$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n \cdots ① \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n \cdots ② \\ c_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}c_n \cdots ③ \end{cases}$，$a_0=0$，$b_0=1$，$c_0=0$

①−③ より $a_{n+1}-c_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n-c_n)$

よって，

$$\begin{aligned} a_n-c_n &=(a_0-c_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &=0 \end{aligned}$$

ゆえに，$a_n=c_n \cdots ④$

② より，$\begin{aligned} b_{n+1} &=\dfrac{1}{2}(a_n+c_n) \\ &=\dfrac{1}{2}(1-b_n)\ (\because\ a_n+b_n+c_n=1) \end{aligned}$

これは $b_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(b_n-\dfrac{1}{3}\right)$ と変形できる。

$$\begin{aligned} b_n-\frac{1}{3} &=\left(b_0-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

よって，$b_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

$a_n+b_n+c_n=1$，及び ④ より，$a_n+b_n+a_n=1$，すなわち

$$2a_n+b_n=1$$

これより

$$\begin{aligned} a_n &=\frac{1}{2}(1-b_n) \\ &=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ &=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ &=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

A_n または B_n となっている確率が求める確率 P_n であり，それは

$$\begin{aligned} P_n &=a_n+b_n \\ &=\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}+\left\{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ &=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdots \text{答} \end{aligned}$$

【総括】

キーとなる $\frac{1}{3}$ という値が隠れており，それをノーヒントとしているあたりが京大です。

【戦略】で考えたように，視覚化して，状態を分類しようとする過程で $\frac{1}{3}$ という設定に辿り着きます。

区間の分け方の際

$$0<x_n<\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\leqq x_n<\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\leqq x_n<1$$

と分けましたが，この等号を入れる入れない問題も問題です。

例えば

$$0<x_n\leqq\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}<x_n<\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\leqq x_n<1$$

と分けると失敗します。

$0<x_n\leqq\frac{1}{3}$ のとき，

$$\begin{cases} f_0(x_n)=\dfrac{x_n}{2}\ (=x_{n+1})\ \text{で，}0<x_{n+1}\leqq\dfrac{1}{6}\left(<\dfrac{1}{3}\right) \\ f_1(x_n)=\dfrac{x_n+1}{2}\ (=x_{n+1})\ \text{で，}\left(\dfrac{1}{3}<\right)\dfrac{1}{2}<x_{n+1}\leqq\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

ここに等号が入ってしまいます。

【参考】

x_n を 2 進法で表すと，$f_0(x_n)$，$f_1(x_n)$ の意味が見えてきます。

2 進法において 2 で割るという操作は，

2 進法で表した数の小数点を左に 1 個ずらす操作

です。

※ 10 進法で考えてみてください。

10 で割るという操作は小数点を左に 1 個ずらす操作ですね。

このことを念頭に置きながら，f_0 という操作と f_1 という操作の意味を考えてみます。

1 を加えてから 2 で割るという操作は小数首位に 1 を追加するという操作です。

例えば，$0.1101_{(2)}$ に f_1 という操作をしてみます。

$$0.1101_{(2)} \xrightarrow{\text{1を加え}} 1.1101_{(2)} \xrightarrow{\text{2で割る}} 0.11101_{(2)}$$

そう考えると，f_0 という操作は 小数首位に 0 を追加する という操作です

以上から，結局本問は $\frac{1}{2}\ (=0.1_{(2)})$ からスタートして

$$\begin{cases} \text{確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で小数首位に 0 を追加する} \\ \text{確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で小数首位に 1 を追加する} \end{cases}$$

という操作を繰り返すという問題です。

そうなってくると，$\frac{2}{3}$ をいうものを 2 進法展開してみたくなります。

これについては「2 倍して先頭の数を抽出する」という操作を繰り返します。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

※ 10 進法でイメージしてみましょう。 0.123 だったら、

10 倍して 1.23 → 先頭の 1 を抽出して 1

0.23 を 10 倍して 2.3 → 先頭の 2 を抽出して 2

0.3 を 10 倍して 3 → 先頭の 3 を抽出して 3

縦に読んで 0.123

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

[2 倍する]

$\frac{2}{3}\times2=\frac{4}{3}=1.***$ 先頭の数は 1

[先頭の数を除く]

$\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$

[2 倍する]

$\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3}=0.***$ 先頭の数は 0

【先頭の数を除く】

$\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$ $\left(\text{最初の } \frac{2}{3} \text{ に戻った}\right)$

これより，$\frac{2}{3}=0.101010\cdots_{(2)}$ ということになります。

n が偶数のとき $n=2m$ とおくと，$x_{2m}=0.\overbrace{**\cdots*}^{2m\text{ 個}}1_{(2)}$

0.1$_{(2)}$ からスタートするので

末尾は 1 で，確定です

$x_{2m}=0.0\,****\cdots*1_{(2)}$　こうなる確率は $\dfrac{1}{2}$

最後の 1 回の操作が f_0

$x_{2m}=0.100\,***\cdots*1_{(2)}$　こうなる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

最後の 3 回の操作が f_0，f_0，f_1

$x_{2m}=0.10100\,***\cdots*1_{(2)}$ こうなる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

$\vdots$

$x_{2m}=0.\overbrace{101010\cdots100}^{2m-2\text{ 個}}*1_{(2)}$　こうなる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}$

$x_{2m}=0.\overbrace{101010\cdots1010}^{2m\text{ 個}}\,1_{(2)}$　こうなる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m}$

$x_{2m}<\dfrac{2}{3}$ となる確率は

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^m\right\}}{1-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{4}\right)^m$$

$$=\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^m\right\}+\left(\frac{1}{4}\right)^m$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

となります。

一方，n が奇数のとき $n=2m-1$ とおくと，$x_{2m-1}=0.\overbrace{**\cdots*}^{2m-1\text{ 個}}1_{(2)}$

$x_{2m-1}=0.0\,****\cdots*1_{(2)}$　こうなる確率は $\dfrac{1}{2}$

$x_{2m-1}=0.100\,***\cdots*1_{(2)}$　こうなる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

$x_{2m-1}=0.10100\,***\cdots*1_{(2)}$ こうなる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$

$\vdots$

$x_{2m-1}=0.\overbrace{101010\cdots10}^{2m-2\text{ 個}}\,0\,1_{(2)}$　こうなる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}$

$x_{2m-1}<\dfrac{2}{3}$ となる確率は

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^m\right\}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^m\right\}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

を得ますので，$\begin{cases} n\text{ が偶数のとき } \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ n\text{ が奇数のとき } \dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$

ということになります。

※ まとめれば $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ となります。