座標平面上で，x 座標と y 座標が共に整数である点を格子点という。n を自然数であるとして，不等式

$$x>0,\ y>0,\ \log_2\frac{y}{x}\leqq x\leqq n$$

を満たす格子点の個数を求めよ。

＜ '99 京都大 ＞

【戦略】

$x=k$ と固定したときに，y がとり得る範囲を調べます。

$$\begin{cases} k>0 \\ y>0 \\ \log_2\dfrac{y}{k}\leqq k\leqq n \end{cases}$$

特に，$\log_2\dfrac{y}{k}\leqq k$，すなわち $\log_2\dfrac{y}{k}\leqq\log_2 2^k$ ですから

$\dfrac{y}{k}\leqq 2^k$ で，$y\leqq k\cdot 2^k$ を得ます。

$y>0$ も考えると $0<y\leqq k\cdot 2^k$ です。

つまり，$x=k$ 上には $(k,\ 1)$，$(k,\ 2)$，…，$(k,\ k\cdot 2^k)$ という $k\cdot 2^k$ 個の格子点があります。

したがって，$\sum k\cdot 2^k$ という形の $\sum$ 計算です。

これは (等差)×(等比) 型であり，公比をかけてズラす「カケズラ」という態度で倒すのが常套手段です。

【解答】

$x=k$ と固定したとき $\begin{cases} k>0 \ \cdots ① \\ y>0 \ \cdots ② \\ \log_2\dfrac{y}{k}\leqq k\leqq n \ \cdots ③ \end{cases}$

を満たす整数 y が何個あるかを調べる。

③ より $\log_2\dfrac{y}{k}\leqq k$，すなわち $\log_2\dfrac{y}{k}\leqq\log_2 2^k$

(底)>1 より，$\dfrac{y}{k}\leqq 2^k$

① より $y\leqq k\cdot 2^k$ であり，② も考えると $0<y\leqq k\cdot 2^k$

$x=k$ と固定したとき，整数 y がとり得る値は

$$y=1,\ 2,\ \cdots,\ k\cdot 2^k$$

つまり，$x=k$ 上には

$$(k,\ 1),\ (k,\ 2),\ \cdots,\ (k,\ k\cdot 2^k)$$

という $k\cdot 2^k$ 個の格子点がある。

①，③ から $0<k\leqq n$ なので，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$

求める格子点の個数を S とすると

$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k$ であり

$$\begin{aligned} S&=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots\cdots+n\cdot 2^n \\ 2S&=\phantom{1\cdot 2^1+{}}1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

公比をかけてずらす
（カケズラ）

辺々引くと

$$\begin{aligned} -S&=2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1} \\ &=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n\cdot 2^{n+1} \\ &=(1-n)\cdot 2^{n+1}-2 \end{aligned}$$

これより，$S=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ なので，求める格子点の個数は

$$(n-1)\cdot 2^{n+1}+2 \text{【個】} \cdots 答$$

【総括】

$x>0$，$y>0$ の下で，

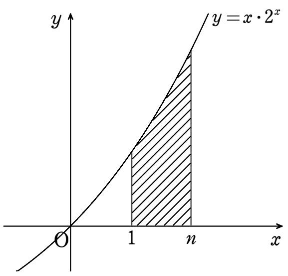
$$\log_2\frac{y}{x}\leqq x \iff \log_2\frac{y}{x}\leqq\log_2 2^x \iff \frac{y}{x}\leqq 2^x \iff y\leqq x\cdot 2^x$$

という変形できます。

ただ，$y=x\cdot 2^x$ のグラフは有名人ではないため，怯んでしまったかもしれませんが，格子点を数え上げる基本原理が分かっていれば，切って $\sum$ するだけです。

ただ，$x>0$ で $y=x\cdot 2^x$ は単調増加であることぐらいは分かります。

イメージで図示すると



といった感じです。